

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre universitaire Nour Elbachir

Institut: sciences et technologie

Département du Tronc Commun Technologie



# Polycopié

Physique IV : Mécanique Rationnelle

COURS et Exercices

*(Unité Fondamentale-- Domaine Sciences et Technique – S03 Licence LMD)*

**Dr. MEBREK MOUED**

Maître de Conférences "A"

**Année : 2020/2021**

## AVANT PROPOS

Ce polycopié de cours de mécanique Rationnelle est un moyen pédagogique destiné aux étudiants de la deuxième année sciences et technologie (ST) du système LMD, il peut servir comme un support au cours dispensé aux étudiants. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide. Le contenu de ce polycopié est structuré en six chapitres.

CHAPITRE I: Un Rappel sur les outils mathématiques notamment les torseurs utilisés pour simplifier l'écriture des équations de la mécanique, L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

CHAPITRE II: Généralités et définitions de base sur le système de forces. Il traite les différents types de force, Classification de forces, les Opérations sur la force.

CHAPITRE III: Décrit l'équilibre statique des solides et les différentes liaisons entre les solides et les équations qui les régissent. L'objectif de ce chapitre de Comprendre la notion de liaisons, les opérations sur les forces, l'équilibre des solides en présence du frottement sont exposés.

CHAPITRE IV: Traitent la cinématique du point matériel et la cinématique du solide indéformables ainsi que les contacts entre les solides. Le maniement des angles d'Euler et leur assimilation sont indispensables pour la compréhension de la mécanique des solides. L'objectif est de décrire et analyser la nature du mouvement d'un système, la Différencier entre les vitesses linéaire et angulaire, Déterminer le centre instantané de rotation, Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide et déterminer la base et la roulante

CHAPITRE V: Géométrie des Masses donc aux centres d'inertie et aux tenseurs d'inertie des solides. Il est proposé pour Savoir calculer et commenter la matrice d'inertie, avoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie, Comprendre la notion de moment d'inertie, et Savoir appliquer le théorème de Guldin.

Chapitre VI: Traite la dynamique des solides en mouvements de rotation autour d'un axe et de leur équilibrage statique et dynamique. Son but est de savoir Maitriser et savoir appliquer le principe fondamental de la dynamique , Savoir mettre en œuvre les théorèmes généraux, Maitriser les notions de fonction de forces ,de potentiel et de la puissance.

enfin on souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcours plein de réussite

## sommaire

<b>Chapitre I: Outils mathématiques.....</b>	<b>01</b>
<b>I.1. Vecteurs.....</b>	<b>01</b>
<b>I.2.Composante d'un vecteur.....</b>	<b>02</b>
<i>I.2.1.Les Coordonnées Polaires.....</i>	<i>02</i>
<i>I.2.2.Les Coordonnées Cylindriques et sphériques .....</i>	<i>03</i>
<b>I.3.Opération sur les vecteurs.....</b>	<b>04</b>
<i>I.3.1. Addition des vecteurs.....</i>	<i>04</i>
<i>I.3.2 .Soustraction des vecteurs.....</i>	<i>06</i>
<b>I.3.3. Décomposition des vecteurs .....</b>	<b>06</b>
<b>I.4. Produit des vecteurs.....</b>	<b>06</b>
<i>I.4.1 .Produit scalaire entre deux vecteurs .....</i>	<i>06</i>
<i>I.4.2 .Produit vectoriel.....</i>	<i>07</i>
<i>I.4.2. Le produit mixte.....</i>	<i>08</i>
<i>I.4.3. Règle des sinus dans un triangle.....</i>	<i>09</i>
<b>I.5. Les Torseurs.....</b>	<b>09</b>
<i>I.5.1.Introduction.....</i>	<i>09</i>
<i>I.5.2. Définition.....</i>	<i>10</i>
<i>I.5.3. Moment d'un vecteur par rapport à un point.....</i>	<i>10</i>
<i>I.5.4. Moment d'un vecteur par rapport à un axe.....</i>	<i>10</i>
<i>I.5.5. Notation.....</i>	<i>11</i>
<b>I.5.6. Propriétés des torseurs .....</b>	<b>11</b>

<i>I.5.6. a. Invariants d'un torseur</i> .....	11
<i>I.5.6. b. Axe central d'un torseur</i> .....	12
<b>I.6. Espace vectoriel des torseurs</b> .....	12
<i>I.6.1. Addition de torseurs</i> .....	13
<i>I.6.2. Produit par un scalaire</i> .....	14
<i>I.6.3. Produit de deux torseurs</i> .....	13
<i>I.6.4. Torseur nul</i> .....	13
<b>I.7. Type des torseurs</b> .....	13
<i>I.7. 2.Glisser</i> .....	13
<i>I.7. 3.Torseur quelconque</i> .....	14
<b>I.8. Tableau récapitulatif sur les torseurs</b> .....	14
<b>Exercices Résolus</b> .....	14
<b>Chapitre II: Généralités et définitions(système de Forces)</b> .....	23
<b>II.1.Définition</b> .....	23
<b>II.2. Classification de forces</b> .....	23
<i>II.2.1.Les forces intérieures</i> .....	24
<i>II.2.2.Les forces extérieures</i> .....	24
<b>II.3.Types des forces</b> .....	24
<i>II.3.1.Forces de contact</i> .....	24
<i>II.3.2.Forces surfaciques</i> .....	24
<i>II.3.3.Forces volumiques</i> .....	25

<b>II.4.Opérations sur la force (composition, décomposition, projection).....</b>	<b>25</b>
<i>II.4.1.composition de deux forces.....</i>	<i>25</i>
<i>II.4.1.1.a. Cas de deux forces parallèles .....</i>	<i>26</i>
<i>II.4.2. Composantes rectangulaires.....</i>	<i>27</i>
<i>Exemples.....</i>	<i>28</i>
<b>II.5. Systèmes de forces à trois dimensions.....</b>	<b>29</b>
<i>II.4.3.1.Composantes rectangulaires.....</i>	<i>29</i>
<b>II.6.Modèles mécanique .....</b>	<b>32</b>
<i>II.6.1.Point matériel .....</i>	<i>32</i>
<i>II.6.2.Corps solide parfait.....</i>	<i>32</i>
<b>Exercices Résolus .....</b>	<b>33</b>
<b>Chapitre III : Statique.....</b>	<b>38</b>
<b>III.1.Introduction.....</b>	<b>38</b>
<b>III.2.Notion principales sur la statique.....</b>	<b>38</b>
<i>III.2.1.solide parfait .....</i>	<i>38</i>
<i>III.2.2.Equilibre.....</i>	<i>38</i>
<i>III.2.2.1. Isolation des systèmes mécaniques.....</i>	<i>39</i>
<b>III.3. Conditions d'équilibre.....</b>	<b>39</b>
<i>III.3. a.cas particulier d'équilibre.....</i>	<i>39</i>
<b>III.4.Système de forces.....</b>	<b>42</b>
<b>III. 5.Principe de la statique .....</b>	<b>42</b>
<b>III.6. Axiomes de la statique.....</b>	<b>42</b>

<b>III.6.1. Axiome1</b> .....	42
<b>III.6.2.Axiome2</b> .....	43
<b>III.6.3.Axiome3</b> .....	43
<b>III.6.4.Axiome4</b> .....	43
<b>III.6.5.Axiome5</b> .....	43
<b>III.7. Liaison et réaction</b> .....	43
<b>III.7.1. Définition</b> .....	43
<b>III.7.2. Liaisons sans frottements</b> .....	44
<b>III.7.3. Liaisons entre solides avec frottement</b> .....	44
<b>III.8. Type de liaison</b> .....	45
<b>III.8.1. Liaison ponctuelle</b> .....	46
<b>III.8.1.a. Simple</b> .....	46
<b>III.8.2. Articulation d'un solide</b> .....	46
<b>III.8.2.1. Liaison verrou (Articulation cylindrique)</b> .....	46
<b>III.8.2.2. Liaison rotule (Articulation sphérique)</b> .....	47
<b>III.8.2.3. Encastrement d'un solide</b> .....	47
<b>III.9. Forces concourantes</b> .....	49
<b>III.9.1.Concourants</b> .....	49
<b>III.9.2. Parallèles</b> .....	49
<b>III.9.3.Non concourantes et non parallèles</b> .....	49
<b>III.9.4. Résultante de deux forces concourantes</b> .....	49
<b>III.9.5. Résultante de plusieurs forces concourantes</b> .....	50

<i>III.9.5.1. Méthode du parallélogramme des forces</i> .....	50
<i>III.9.5.2. Règle du polygone des forces</i> .....	51
<b>Exercices Résolus</b> .....	52
<b>Chapitre IV : Cinématique du solide rigide</b> .....	60
<b>IV.1. Introduction</b> .....	60
<b>IV.2. Cinématique du Point Matériel (Rappel)</b> .....	60
<i>IV.2.1. Trajectoire, vitesse et accélération d'un point</i> .....	60
<i>IV.2.1.1. Trajectoire</i> .....	60
<b>IV.2.2. Loi du Mouvement Rectiligne</b> .....	61
<i>IV.2.2.1. Définition</i> .....	61
<i>IV.2.2.2. vitesse et accélération du point en mouvement rectiligne</i> .....	61
<i>IV.2.2.3. vitesse instantanée</i> .....	62
<b>IV.3. Types de Mouvement Rectilignes</b> .....	62
<i>IV.3.1. Mouvement uniforme</i> .....	62
<i>IV.3.1.1. Définition</i> .....	62
<i>IV.3.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varie</i> .....	63
<b>IV.4. Mouvement circulaire</b> .....	63
<i>IV.4.1. Cinématique de Rotation du point matériel</i> .....	63
<i>IV.4.2. Cinématique du corps solide</i> .....	65
<i>IV.4.2.1. Notion d'un solide parfait</i> .....	65
<i>IV.4.2.2. Repérage d'un solide</i> .....	65
<i>IV.4.2.3. Matrice de passage de R à R<sub>0</sub></i> .....	66
<i>IV.4.2.4. Angle de précession</i> .....	66
<i>IV.4.2.5. Angle de nutation</i> .....	67

<i>VI.4.2.6. Angle de rotation propre</i> .....	68
<i>IV.5. Mouvement de translation</i> .....	69
<i>IV5.1. Mouvement de rotation autour d'un axe</i> .....	70
<b>IV.6. Mouvement Plan sur Plan</b> .....	71
<i>IV.6.1. Définition</i> .....	71
<i>IV.6.2. Centre instantané de rotation (CIR)</i> .....	71
<b>IV.7. Mouvement composé</b> .....	72
<i>IV.7.1. Dérivation composée (Rappel)</i> .....	72
<b>Exercices Résolus</b> .....	74
<b>Chapitre V: Géométrie des Masses</b> .....	85
<b>V.1. Introduction</b> .....	85
<b>V.2. Masse d'un système Matériel</b> .....	85
<b>V.3. Additivité des masses</b> .....	85
<i>V.3.1. Système discrets</i> .....	86
<i>V.3.2. Système continue</i> .....	86
<i>V.3.3. Système (S) est un volume</i> .....	86
<i>V.3.4. Système (S) est une surface</i> .....	86
<i>V.3.5. Système (S) est linéaire</i> .....	86
<b>V.4. Centre d'inertie d'un solide</b> .....	86
<i>V.4.1. Définition</i> .....	86
<i>V.4.2. Cas d'un système complexe</i> .....	88
<b>V.5. Théorème de Guldin</b> .....	88
<i>V.5.1. premier Théorème de Guldin</i> .....	89

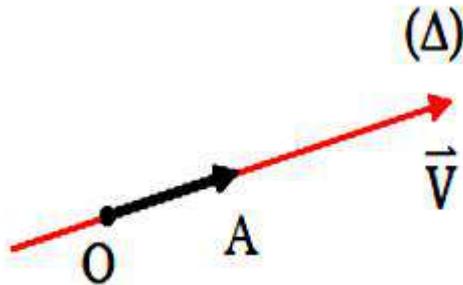
<b>V.5. 2. deuxième Théorème de Guldin.....</b>	<b>90</b>
<b>V.6. Tenseur D'inertie.....</b>	<b>91</b>
<b>V.6.1. Définition.....</b>	<b>91</b>
<b>V.6.2. Matrice d'inertie.....</b>	<b>91</b>
<b>V.6.3. Cas particuliers.....</b>	<b>91</b>
<b>V.6.3.a. Le système présente certains plans de symétrie.....</b>	<b>91</b>
<b>V.6.3.b. Système est un corps de révolution autour de l'axe Oz.....</b>	<b>93</b>
<b>V.6.4. Axes principaux d'inertie.....</b>	<b>93</b>
<b>V.6.5. Théorème de Huygens.....</b>	<b>94</b>
<b>V.6.5.1. Enoncé du théorème de Huygens.....</b>	<b>95</b>
<b>V.6.6. Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque (<math>\Delta</math>).....</b>	<b>95</b>
<b>Exercices Résolus .....</b>	<b>96</b>
<b>Chapitre VI : Dynamique du solide rigide .....</b>	<b>109</b>
<b>VI.1. Introduction.....</b>	<b>109</b>
<b>VI.2. Rappel sur le torseur des forces extérieures.....</b>	<b>109</b>
<b>VI.3. Rappel de la dynamique des particules .....</b>	<b>109</b>
<b>VI.3.1. Première loi de Newton.....</b>	<b>109</b>
<b>VI.3.2. Deuxième loi de Newton.....</b>	<b>110</b>
<b>VI.3.3. Troisième loi de Newton.....</b>	<b>110</b>
<b>VI.4. Principe fondamental de dynamique appliquée aux systèmes matériels</b>	<b>110</b>
<b>VI.4.1. Cas particulier .....</b>	<b>110</b>
<b>VI.5. Théorème de la résultante cinétique.....</b>	<b>110</b>

<b>VI.6. Solide mobile autour d'un axe fixe <math>\Delta</math></b> .....	111
<b>VI.7. Théorème de l'énergie cinétique</b> .....	111
<b>VI.7.1. Puissance et travail de force</b> .....	111
<b>VI.7.1.a. Puissance d'un Point Matériel</b> .....	111
<b>VI.7.2. Cas des solides indéformables</b> .....	111
<b>VI.8. L'énergie cinétique d'un système discontinu</b> .....	112
<b>VI.8.1. L'énergie cinétique d'un solide indéformable (continu)</b> .....	112
<b>VI.9. Conservation de l'énergie mécanique</b> .....	112
<b>Exercices Résolus</b> .....	113
<b>-Bibliographie</b> .....	134

## Chapitre I: Les Outils Mathématiques

### I.1. Vecteurs

Un vecteur est un segment de droite  $OA$  sur lequel on a choisi une origine  $O$  et une extrémité  $A$ , il est défini par: son origine, sa direction, son sens, son module



**Fig.I.1:**Présentation graphique d'un vecteur

Par convention on adopte la notation suivante : vecteur :  $\vec{V}$  ou  $\overrightarrow{OA}$

Néanmoins, le vecteur peut se représenter en plusieurs types :

- **Vecteur libre** : la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connus ;
- **Vecteur glissant** : le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé ;
- **Vecteur lié** : tous les éléments du vecteur sont déterminés ;
- **Vecteur unitaire** : c'est un vecteur dont le module est égal à 1.
- **Vecteurs colinéaires** : ils possèdent le même support.
- **Vecteurs coplanaires** : leurs supports se trouvent dans un même plan,
- **Vecteurs équipollents (équivalents)** : ils ont les mêmes grandeurs et les mêmes orientations, même s'ils n'ont pas le même point d'application.
- **Vecteurs égaux** : vecteurs équipollents de même sens.
- **Vecteurs opposés** : vecteurs équipollents de sens contraires ou opposés.
- **Vecteurs identiques** : vecteurs équipollents égaux de même origine.

### I.2.Composante d'un vecteur :

L'origine d'un vecteur  $\vec{A}$  dans l'espace à trois dimensions peut être l'origine  $O$  d'un

système d'axes orthogonaux. Soit  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  les composantes de ce vecteur suivant les trois axes X, Y et Z.

Le vecteur A s'écrit alors :  $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

Le module de  $\vec{A}$  est  $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$  (I-01)

En particulier, le vecteur position  $\vec{r} = \vec{OM}$ , d'origine O et d'extrémité le point M, de coordonnées (x, y, z) s'écrit :  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Et a pour module:  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (I-02)

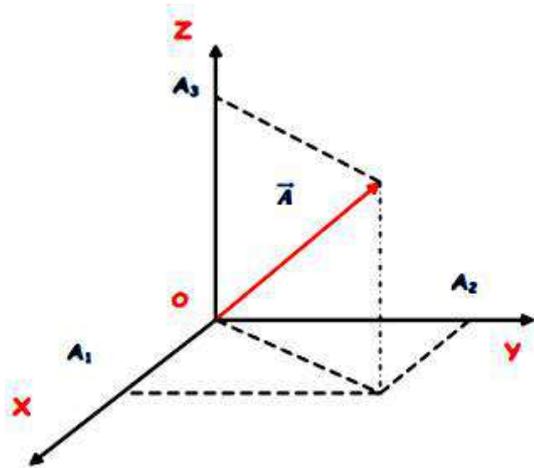


Fig.I.2:Les trois Composantes d'un vecteur

### I.2.1.Les Coordonnées Polaires

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (r, φ) . (Fig. I.3) ,avec :

r :Rayon polaire

φ : Angle polaire

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :  $\vec{OM} = \vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$  (I-03)

$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$  et  $\vec{u}_r = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$

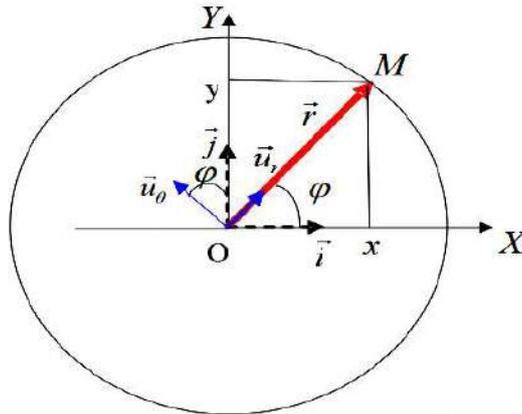
Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suit :

$$\overline{OM} = \vec{r} = A_r \cdot \vec{u}_r + A_\varphi \cdot \vec{u}_\varphi \quad (\text{I-04})$$

Où  $(A_r, A_\varphi)$  représente les deux composantes de  $\overline{OM}$  dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

La relation qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = \arccos x/r \\ \varphi = \arcsin y/r \end{cases} \quad (\text{I-05})$$



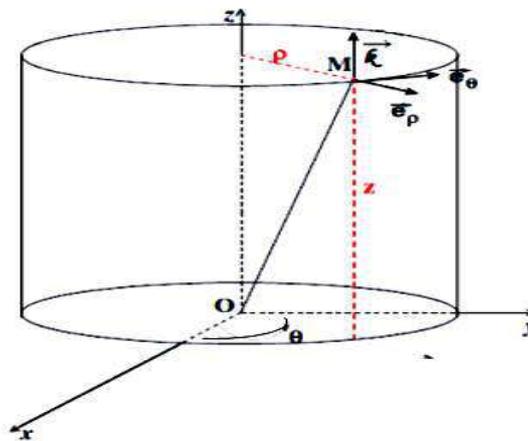
**Fig.I.3:**Coordonnees Polaires

### 1.2.2.Les Coordonnées Cylindriques et sphériques :

Dans les phénomènes de physique et de science de terre et astronomie, le système de coordonnées cylindrique et sphérique est souvent utilisé, le vecteur  $\vec{u}$  dans une base cylindrique est donné par :

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{K}) \text{ est donné par : } \vec{u} = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{K}$$

$$\vec{u} = \overline{OM} = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{K} \quad (\text{I-06})$$

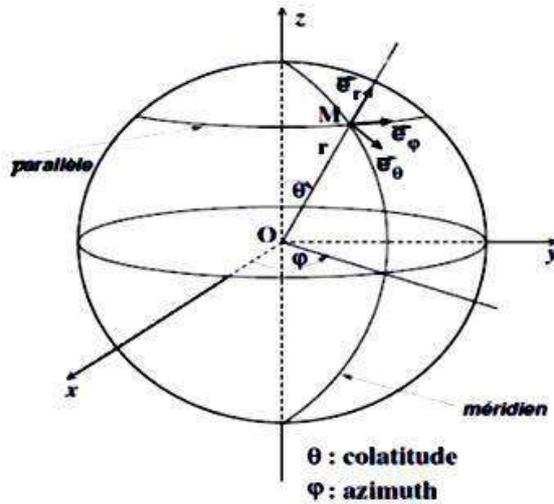


**Fig. I.4.** Les coordonnées cylindriques

Or que dans l'espace des coordonnées sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  le vecteur  $\vec{u}$  est défini comme :  $\vec{u} = r \cdot \vec{e}_r$ ,  $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{e}_r$  (I-07)

Etant que  $r$  est calculé sur l'espace tridimensionnel comme la démontre l'égalité suivante :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_x = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ u_y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ u_z = r \cos\varphi \end{cases} \quad (\text{I-08})$$



**Fig. I.5.** Les coordonnées Sphériques

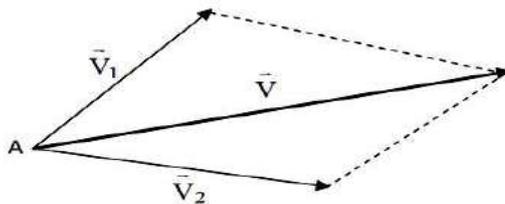
### I.3. Opération sur les vecteurs :

#### I.3.1. Addition des vecteurs :

La sommation des deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  s'effectue en transportant les origines des deux vecteurs en un seul point A afin de construire un parallélogramme dont les cotés sont  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

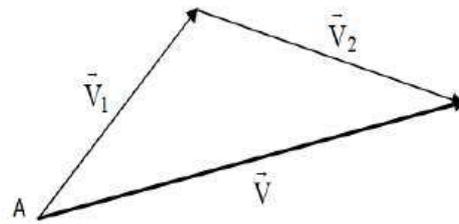
Le vecteur résultant  $\vec{V}$  est défini par :  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

$$= (V_{1x} + V_{2x} + V_{3x})\vec{e}_1 + (V_{1y} + V_{2y} + V_{3y})\vec{e}_2 + (V_{1z} + V_{2z} + V_{3z})\vec{e}_3 \quad (\text{I-08})$$



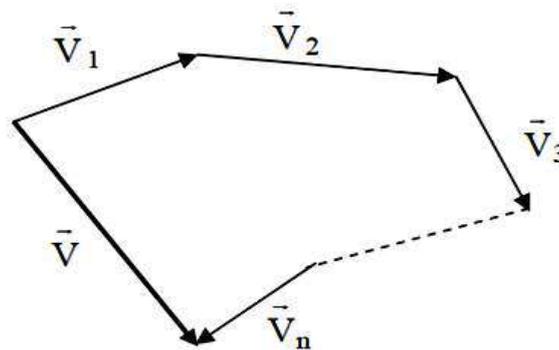
**Fig. I.6 .**Règle du parallélogramme

À partir de la construction du parallélogramme, nous pouvons déduire une autre méthode graphique pour l'addition des vecteurs. Cette méthode est connue sous le nom *règle du triangle*. Nous pourrions dessiner seulement la moitié du parallélogramme. Le vecteur résultant de l'addition de deux vecteurs peut être trouvé en disposant  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  bout à bout et en joignant ensuite l'origine de  $\vec{V}_1$  à l'extrémité de  $\vec{V}_2$



**Fig. I.7.** Règle du triangle

L'addition de plusieurs vecteurs se fait en disposant tous les vecteurs bout à bout et en traçant le vecteur qui a comme origine, l'origine du premier vecteur, et comme extrémité, l'extrémité du dernier. Cette façon de procéder traduit graphiquement la *règle du polygone*.



**Fig.I.9.** Règle du polygone

D'autre part, La sommation des vecteurs est :

\* Commutative :  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$  (I-10)

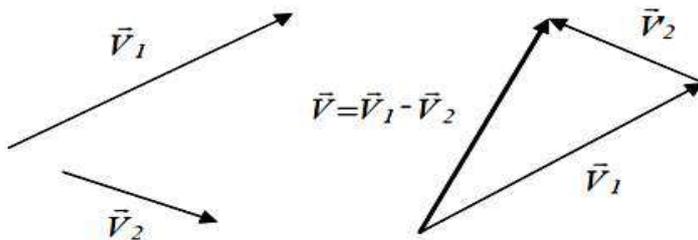
\* Associative :  $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$  (I-11)

\* Distributive par rapport à la somme vectorielle :  $\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 + \lambda \vec{V}_2$  (I-12)

\*Distributive par rapport à la somme scalaire :  $\vec{V}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V}$  (I-13)

### I.3.2 .Soustraction des vecteurs :

La soustraction de deux vecteurs  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$  est le vecteur  $\vec{V}$  défini comme l'addition du vecteur  $\vec{V}_1$  à un vecteur  $\vec{V}'_2$  égal et opposé à  $\vec{V}_2$  .



**Fig. I.10.** Soustraction de deux vecteurs

### I.3.3. Décomposition des vecteurs :

Nous avons montrés jusqu'à maintenant qu'il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs vecteurs par un vecteur unique. Réciproquement, il est toujours possible de remplacer un vecteur unique  $\vec{V}$  par deux ou plusieurs vecteurs. Ces vecteurs sont appelés les *composantes* du vecteur original  $\vec{V}$ . Nous devons considérer deux cas d'intérêt particulier :

1. Une des composantes  $\vec{V}_1$  est fixée. On calcule la deuxième composante en utilisant la règle du triangle.
2. Les deux directions de décomposition sont données. La grandeur et l'orientation des composantes sont obtenues en appliquant le principe du parallélogramme.

### I.4. Produit des vecteurs :

#### I.4.1 .Produit scalaire entre deux vecteurs :

Soient deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire, , (Fig. I.11) :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos \theta$  (I-14)

Tel que  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs, Ce produit admet quelque propriétés tel que :  $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

Un produit scalaire de deux vecteurs est :

\* Commutatif :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$  (I-15)

\* Associatif par rapport la multiplication d'un scalaire :

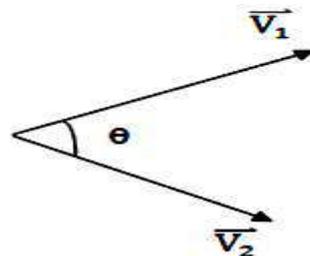
$$\lambda(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 \cdot \lambda \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (\lambda \vec{V}_2) \quad (\text{I-16})$$

\* Distributif par rapport la somme vectorielle :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \quad (\text{I-17})$$

\* Nul si seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux :

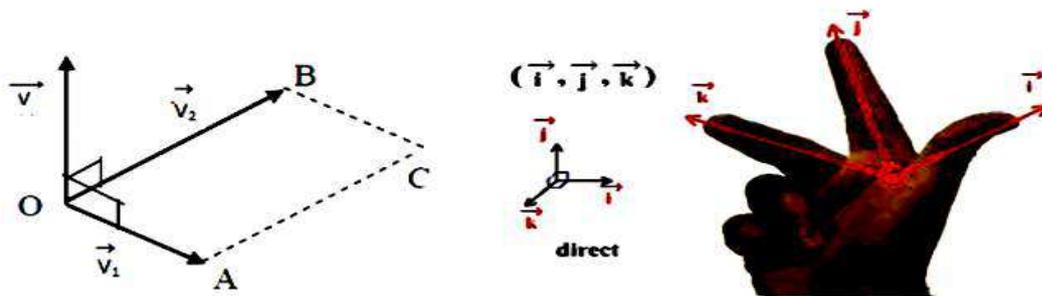
$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad (\text{I-18})$$



**Fig. I.11.** Produit scalaire

**I.4.2 .Produit vectoriel :** Soient deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , leur produit vectoriel est un vecteur orienté (Fig. I.12),  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}$

\*la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$



**Fig. I.12.** Produit vectoriel

\* le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite

\* sa norme vaut  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \sin\alpha \quad (\text{I-19})$

Tel que  $\alpha$  est l'angle entre les deux vecteurs

**\*Propriétés:**  $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ ,  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

il peut être aussi déterminé par la méthode du déterminant

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} \quad (\text{I-20})$$

D'autre part, Le produit vectoriel est :

\* Distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) \wedge \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 + (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \quad \text{et} \quad \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3) \quad (\text{I-21})$$

\* Associatif par rapport la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \lambda \vec{V}_1 \wedge \lambda \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (\lambda \vec{V}_2) \quad (\text{I-22})$$

$$\text{*Antisymétrique où anticommutatif : } (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = - (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1) \quad (\text{I-23})$$

\* Nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires :

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad (\text{I-24})$$

### I.4.2. Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2)x_1 - (x_2z_3 - z_2x_3)y_1 + (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 \quad (\text{I-25})$$

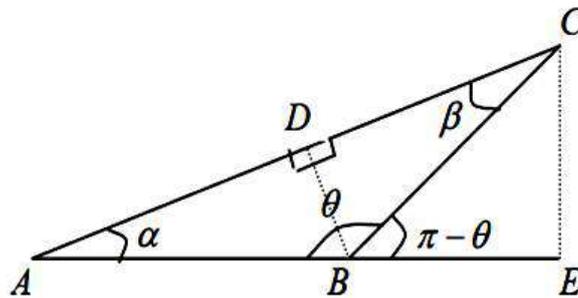
### I.4.3. Règle des sinus dans un triangle

Soit un triangle quelconque  $ABC$  nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.

Dans les triangles  $ABD$  et  $CBD$ , nous avons :

$$\sin \alpha = \frac{DB}{AB}, \text{ et } \sin \beta = \frac{DB}{BC} \text{ d'où}$$

$$AB \sin \alpha = BC \sin \beta, \text{ On déduit : } \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta}$$



**Fig. I.13.**Règle des sinus dans un triangle

De même pour les triangles  $AEC$  et  $BEC$ :

$$\text{nous avons : } \sin \alpha = \frac{EC}{AC}, \text{ et } \sin(\pi - \theta) = \frac{EC}{BC}$$

$$\text{d'où } AC \sin \alpha = BC \sin(\pi - \theta) = BC \sin \theta$$

$$\text{On déduit : } \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \theta}$$

On déduit finalement une relation appelée règle des sinus dans un triangle:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \theta} \quad (\text{I-26})$$

## I.5. Les Torseurs:

### I.5.1.Introduction

Le torseur est un outil mathématique privilégié de la mécanique du solide. L'utilisation des torseurs dans l'étude des systèmes mécaniques complexes est très commode car elle facilite l'écriture des équations vectorielles. Une équation vectorielle représente trois équations scalaires et une équation torsorielle est équivalente à deux équations

vectérielles donc à six équations scalaires. Nous verrons dans les prochains chapitres quatre types de torseurs différents : le torseur cinématique, le torseur cinétique, le torseur dynamique et le torseur des actions.

### I.5.2. Définition

Un torseur que nous noterons  $[T]$  est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique et ayant les propriétés suivantes :

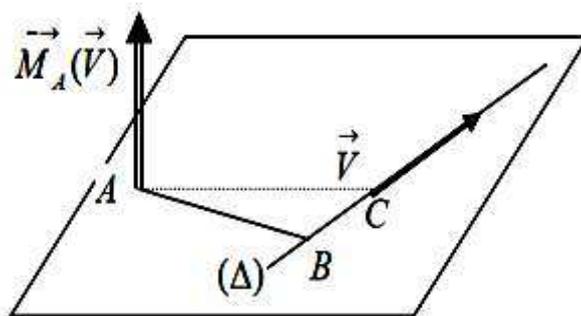
- a) Le premier champ de vecteurs fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur  $\vec{R}$  indépendant du point A et appelé résultante du torseur  $[T]$  .
- b) Le second champ de vecteur fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur  $\vec{M}_A$  qui dépend du point A. Le vecteur  $\vec{M}_A$  est appelé moment au point A du torseur  $[T]$  .

### I.5.3. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment au point A est indépendant de la position du vecteur  $\vec{V}$  sur l'axe . En effet nous avons :  $\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{AC} \wedge \vec{V} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \wedge \vec{V}$

Or nous avons :  $\vec{BC} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{BC} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{AC} \wedge \vec{V} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \wedge \vec{V} = \vec{AB} \wedge \vec{V} \quad (I-27)$$



**Fig. I.14.** Moment d'un vecteur par rapport à un point

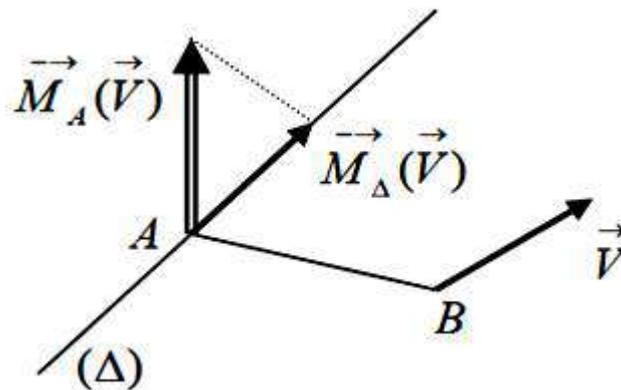
Le moment  $\vec{M}_A(\vec{V})$  est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{V}$  La distance  $AB$  est souvent appelée bras de levier.

### I.5.4. Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment  $\vec{M}_\Delta(\vec{V})$  d'un vecteur  $\vec{V}$  par rapport à un axe  $(\Delta)$  défini par un point  $A$  et un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , est égal à la projection du moment  $\vec{M}_A(\vec{V})$  sur l'axe  $(\Delta)$ .

$$\vec{M}_\Delta(\vec{V}) = (\vec{M}_A(\vec{V}) \cdot \vec{u}) \vec{u} \quad (\text{I-28})$$

Le moment par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est indépendant du point  $A$ .



**Fig. I.15.** Moment d'un vecteur par rapport à un axe

### I.5.5. Notation

La résultante  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{M}_A$  au point  $A$ , constituent les éléments de réduction du torseur au point  $A$ .

-La résultante des  $n$  vecteurs :  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \quad (\text{I-29})$

-Le moment résultant en un point  $A$  de l'espace est donné par :

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AB}_i \wedge \vec{V}_i \quad (\text{I-30})$$

Les deux grandeurs constituent le torseur développé au point  $A$  associé au système de

vecteurs donnés. On adopte la notation suivante :  $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases} \quad (\text{I-31})$

### I.5.6. Propriétés des torseurs

**I.5.6. a. Invariants d'un torseur :** un invariant du torseur est un paramètre scalaire où vectorielle indépendant du point de réduction du torseur, tel que:

\*La résultante  $\vec{R}$  d'un torseur est un invariant.

\*L'invariant scalaire (Automoment) d'un torseur est le produit :

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = \vec{R} \cdot \vec{M}_p \quad (\text{I-32})$$

\*L'invariant vectoriel d'un torseur est le vecteur :

$$\vec{A} = A \cdot \frac{\vec{R}}{R^2} \quad (\text{I-33})$$

**I.5.6. b. Axe central d'un torseur :** On appelle axe central d'un torseur, l'ensemble des points  $P$  pour lequel la résultante et le moment en  $P$  sont *colinéaires*. Le coefficient de linéarité s'appelle le *pas du torseur*.

$$\vec{M}_p = \lambda \cdot \vec{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow P \in \Delta$$

Soit le  $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$  avec  $\vec{R} \neq 0$  Si  $P$  est un point de l'axe central on a :  $\vec{M}_p = \lambda \cdot \vec{R}$  et

$$\vec{M}_p = \vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} \parallel \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \vec{R} \wedge \overrightarrow{MP} = \vec{0} = \vec{R} \wedge (\vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}) = \vec{R} \wedge \vec{M}_A + \vec{R} \wedge (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{R})$$

En utilisant la relation du double produit vectoriel, on obtient l'équation vectorielle de l'axe central du torseur:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{MP}}{R^2} \cdot \vec{R} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \mu \cdot \vec{R} \quad (\text{I-34})$$

Etant que,  $\lambda$  le pas du torseur est :

$$\vec{M}_p = \lambda \cdot \vec{R} \Leftrightarrow \vec{M}_p \cdot \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R} \cdot \vec{R} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{M}_p \cdot \vec{R}}{R^2} \quad (\text{I-35})$$

En outre, au niveau de l'axe central du torseur on a :

\* le moment en tout point de l'axe central est invariant appeler *moment central du torseur*.

\* la norme du moment central est minimale.

\* le vecteur directeur de la droite de l'axe central du torseur est la résultante du torseur

## I.6. Espace vectoriel des torseurs:

**I.6.1. Addition de torseurs :** La somme de deux torseurs  $[T]_1$  et  $[T]_2$  est un torseur  $[T]_A$  dont les éléments de réduction sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs  $[T]_1$  et  $[T]_2$  .

$$[T]_A = [T]_1 + [T]_2 = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} \end{cases} \quad (\text{I-36})$$

**I.6.2. Produit par un scalaire :** On définit le produit par un scalaire du torseur

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases} \text{ par le torseur : } [T]_A = \lambda [T]_1 \Leftrightarrow [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \lambda \vec{R}_1 \\ \vec{M}_A = \lambda \vec{M}_{1A} \end{cases} \quad (\text{I-37})$$

Avec  $\lambda \in \mathbb{R}$

**I.6.3. Produit de deux torseurs:** On appelle comoment des deux torseurs  $[T]_1$  et  $[T]_2$  le réel défini par :

$$\phi(A) = [T]_1 \otimes [T]_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{1A} \quad (\text{I-38})$$

#### **I.6.4. Torseur nul**

Le torseur nul, noté  $[0]$  est l'élément neutre pour l'addition de deux torseurs. Ses éléments de réduction sont nuls en tout point de l'espace

$$[0] = \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_A = 0 \end{cases} \quad \forall A \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{I-39})$$

### **I.7. Type des torseurs :**

**I.7. 1.Couple :** On appelle couple un torseur dont la résultante est nulle. Le moment d'un couple est un invariant du torseur et par conséquent les invariants scalaire et

$$\text{vectoriel sont nuls aussi. } [T] = \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_A \neq 0 \end{cases} \quad (\text{I-40})$$

**I.7. 2.Glisser :** On appelle glisseur tout torseur de résultante non nulle qui admet un

$$\text{point } P \text{ pour lequel son moment est nul. } [T] = \begin{cases} \vec{R} \neq 0 \\ \vec{R} \cdot \vec{M}_A = 0 \end{cases} \quad (\text{I-41})$$

**I.7. 3. Torseur quelconque :** Un torseur est quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul.  $\vec{R} \cdot \vec{M}_A \neq 0$  (I-42)

**I.8. Tableau récapitulatif sur les torseurs**

Eléments de réduction au point A	Construction minimum	Type de torseur
$\vec{R} \neq \vec{0}$ $\vec{R} \cdot \vec{M}_A = 0$	Un vecteur lié unique	Torseur glisseur
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A \neq \vec{0}$	Deux vecteurs liés formant un couple	Torseur couple
$\vec{R} \cdot \vec{M}_A \neq 0$	Un vecteur lié + 2 vecteurs liés formant un couple	Torseur quelconque
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{0}$	Vecteurs nuls	Torseur nul

**EXERCICES RESOLUS**

**EX:01**

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A (2, 3,-3), B(5,7,2) Déterminer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  ainsi que son module, sa direction et son sens

**EX:02** Dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on donne trois points A, B, C de l'espace ayant pour coordonnées : A(1,3,4), B (-1,4,-2) et C (0,1,1) .soit  $(\pi)$  un plan défini par ces trois points et la normale  $\vec{n}$  à celui-ci.

Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{V} = 3 \vec{i} + \vec{j} - 4 \vec{k}$  dans le plan  $(\pi)$  et suivant la normale à ce plan.

**EX:03** on donne  $\vec{U}(-1,0,5)$  et  $\vec{V}(4,y,z)$  Déterminer  $y, z$  pour que les vecteurs  $\vec{U}, \vec{V}$  soient colinéaires

**EX:04** on donne  $\vec{U}(2,-3,5)$  et  $\vec{V}(3,y,-2)$  Déterminer  $y$  pour que les vecteurs  $\vec{U}, \vec{V}$  soient perpendiculaire

**EX:05** trouver le volume d'un parallélépipède de cotés  $\vec{U}, \vec{V}$  et  $\vec{W}$  tels que  $\vec{U}(3,-1,0), \vec{V}(0,1,2), \vec{W}(1,5,-4)$ .

**EX:06** Par rapport à un repère  $R(0,X,Y,Z)$  on considère les vecteurs  $\vec{U}(0,3,1), \vec{V}(0,1,2)$

1-Calculer  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  et en déduire l'angle  $\phi(\vec{U}, \vec{V})$

2-Déterminer les cosinus directeurs de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$

3-Calculer les composantes de  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{W}$

4-Déterminer  $\|\vec{W}\|$  par deux méthodes.

**EX:07** La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est donnée par les équations paramétriques suivantes:

$$X = 4t^2, Y = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right), Z = 3t + t^3$$

Montrer que le vecteur vitesse  $\vec{V}$  fait un angle constant avec l'axe  $oz$ . Quelle est la valeur de cet angle.

**EX:08** Dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , deux points A et B ont pour coordonnées : A(2,2,-3), B(5,3,2) Déterminer :

1) Le moment du vecteur glissant  $\overline{AB}$  par rapport au centre O du repère ;

2) Le moment du vecteur glissant  $\overline{AB}$  par rapport à la droite ( $\Delta$ ) passant par le point O et le point C(2,2,-3).

**EX:09** Soient les trois vecteurs:

$$\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$$

définis dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et liés respectivement aux points  $A(0,1,2)$ ,  $B(1,0,2)$ ,  $C(1,2,0)$

- 1) Construire le torseur  $[T]_0$  associé au système de vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$
- 2) En déduire l'auto moment ;
- 3) Calculer le pas du torseur ;
- 4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement

**EX:10**

Soit le torseur  $[T_1]_0$  défini par les trois vecteurs  $\vec{V}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$ , et

$\vec{V}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , et  $\vec{V}_3 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$  définis dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  respectivement aux points  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,1)$  ; et le torseur

$$[T_2]_0 = \left\{ \frac{\vec{R}_2}{\vec{M}_2} \text{ où } \vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \text{ et } \vec{M}_2 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k} \right.$$

- 1) Déterminer les éléments de réduction du torseur  $[T_1]_0$ , conclusion;
- 2) Déterminer le pas et l'axe central du torseur  $[T_2]_0$
- 3) Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;
- 4) Calculer l'auto moment du torseur somme .

**EX:11** Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec

$\vec{OA} = -\frac{21}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{12}{9}\vec{k}$  et un vecteur  $\vec{V}_1 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  dont l'axe passe par le point A, Soit  $[T_2]_0$  un torseur défini au point O par ses éléments de réduction  $\vec{R}_2$  et  $\vec{M}_{20}$  tel que :

$$[T_2]_0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{array} \right.$$

- 1) Déterminer les éléments de réduction du torseur  $[T_1]_0$  dont la résultante est le vecteur  $\vec{V}_1$

- 2) Pour quelle valeur de  $\alpha$  les deux torseurs sont égaux ;
- 3) En déduire le pas et l'axe central du torseur  $[T_2]_0$  pour cette valeur de  $\alpha$
- 4) Calculer le produit des deux torseurs pour  $\alpha = 2$

**EX: 12** Soient deux torseurs  $[T_1]_A$  et  $[T_2]_A$  définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé  $R(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{M}_{1A} = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{M}_{2A} = 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases}$$

- 1- Déterminer l'axe central et le pas du torseur  $[T_1]_A$
- 2- Déterminer l'auto moment du torseur  $[T_1]_A$ , montrer qu'il est indépendant du point A
- 3- Construire le torseur  $[T_1]_A = a [T_1]_A + b [T_2]_A$  avec a et b  $\in \mathbb{R}$
- 4- Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur  $[T_1]_A$  soit un torseur couple
- 5- Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou le mesure .
- 6- Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme  $[T_1]_A + [T_2]_A$  .

**EX:01**

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est donné par:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

**Son module :**  $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

**Sa direction** est déterminée par les angles  $(\alpha, \beta, \theta)$  qu'il fait avec chacun des axes du repère.

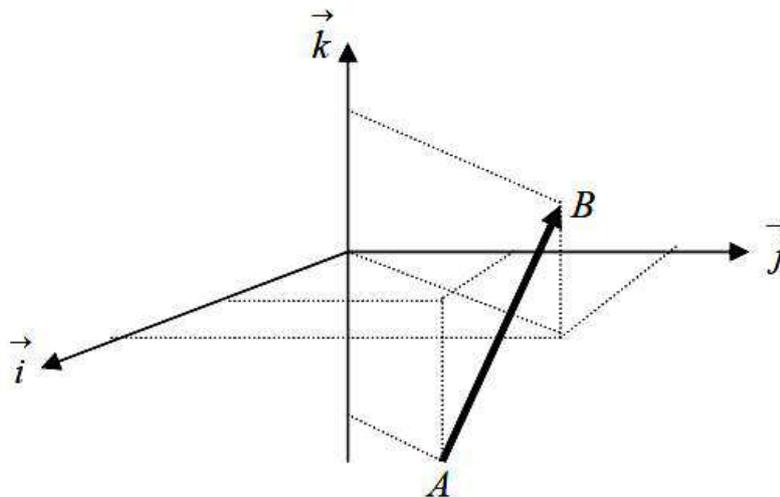
Ces angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) : \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = AB \cdot 1 \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}}{AB \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \Rightarrow \alpha = 64.89^\circ$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) : \overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = AB \cdot 1 \cos\beta \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j}}{AB \cdot 1} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \Rightarrow \beta = 55.54^\circ$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) : \overrightarrow{AB} \cdot \vec{k} = AB \cdot 1 \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}}{AB \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \Rightarrow \theta = 44.99^\circ$$

**son sens :** comme le produit scalaire du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.



### **EX:03**

On a :  $\vec{U}(-1,0,5)$  et  $\vec{V}(4,y,z)$ ,

pour que les vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  soient colinéaires il faut que :  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5y \\ z+20 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -20 \end{cases}$$

**EX:04**

On a :  $\vec{U} (2, -3, 5)$  et  $\vec{V} (3, y, -2)$

pour que les vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  soient perpendiculaires il faut que :

$$\vec{U} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

$$6x - 3y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$$

**EX:07**

La vitesse du mobile est donnée par :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 4(1-t^2) \\ V_z = 3(1+t^2) \end{cases}$$

Nous avons en effet :

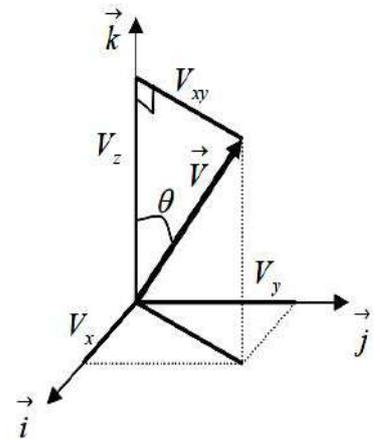
$$V_{xy} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_{xy}}{V_z} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{64t^2 + 16(1-t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{64t^2 + 16t^4 - 32t^2 + 16}}{3(1+t^2)}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{16(t^2 + 2t^2 + 1)}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{16(1+t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{4(1+t^2)}{3(1+t^2)} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53,13^\circ \quad \text{C'est la valeur de l'angle est bien constante.}$$

**EX:08**

1) Le moment du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par rapport au point O est donné par :

$$\vec{M}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix} = 13 \vec{i} - 19 \vec{j} - 4 \vec{k}$$

2) Moment du vecteur  $\vec{AB}$  par rapport au point à la droite ( $\Delta$ ) définie par le point O

et le vecteur unitaire  $\vec{u}$  tel que :  $\vec{u} = \frac{\vec{OC}}{OC} = \frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3} (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$

$$\vec{M}_\Delta = (\vec{M}_0 \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3} (26 - 38 - 4) \cdot \vec{u} = -\frac{16}{3} \vec{u}$$

### **EX:09**

1) Les éléments de réduction du torseur  $[T]_0$  sont :

$$\text{La résultante : } \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{j} + 3\vec{k}$$

Le moment au point O :  $\vec{M}_0 = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{V}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{V}_3$

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2) \text{ L'automoment : } A = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = (\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = -2 - 3 = 5$$

$$3) \text{ Pas du torseur : } \lambda = \frac{\vec{M}_p \cdot \vec{R}}{R^2} = \frac{-5}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{-5}{\sqrt{10}}$$

4) Equation vectorielle de l'axe central :

Si l'axe ( $\Delta$ ) est un axe central alors :  $\forall P \in (\Delta) \Rightarrow \vec{M}_p = \lambda \vec{R}$  , Son équation

vectorielle est donnée par :  $\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{R^2} + \lambda \vec{R}$  , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \vec{i} + \left(-\frac{3}{10} + \lambda\right) \vec{j} + \left(\frac{1}{10} + 3\lambda\right) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{Si: } \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \text{ alors, } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{10} + \lambda, z = \frac{1}{10} + 3\lambda$$

$$\text{D'où : } z = \frac{1}{10} + 3 \left( y + \frac{3}{10} \right) = 3y + 1$$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan (yOz) situé à  $x = \frac{1}{2}$  et d'équation :  $z = 3y + 1$

### **EX:10**

1) Eléments de réduction du torseur:

$$[T]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \vec{M}_{10} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{aligned}$$

$$[T]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{10} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{cases}$$

2) Pas et axe central du torseur  $[T]_2$

$$P_2 = \frac{\vec{M}_2 \cdot \vec{R}_2}{R^2} = \frac{(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k})}{4 + 1 + 9} = -\frac{11}{7}$$

$$\text{et Axe central du torseur : } \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_2}{R^2_2} + \lambda \cdot \vec{R}_2$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{-13}{14} + 2\lambda \right) \vec{i} + \left( \frac{5}{14} + \lambda \right) \vec{j} + \left( \frac{1}{2} + 3\lambda \right) \vec{k} \end{aligned}$$

### 3) Somme et produit des deux torseurs

a) Somme des deux torseurs :

$$[T]_0 = [T_1]_0 + [T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_0 = \vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

b) Produit des deux torseurs :

$$[T_1]_0 \otimes [T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{cases} \otimes \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{20} \end{cases} = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{20} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{10} = -25$$

4) Automoment du torseur somme :

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}) = -17$$

## Chapitre II: Généralités et définitions (système de Forces)

### II.1. Définition

En physique, la force est une action mécanique capable de créer une accélération, c'est-à-dire une modification de la vitesse d'un objet ou d'une partie d'un objet, ce qui induit un déplacement ou une déformation de l'objet. Elle est généralement représentée par un vecteur pour donner son sens et sa direction (au sens mathématique du terme).

Le vecteur force est caractérisé par 4 éléments :

1. la direction : orientation de la force.
2. le sens : vers où la force agit.
3. la norme (ou intensité) : grandeur de la force, elle est mesurée en Newton (N)
4. le point d'application : endroit où la force s'exerce.

L'unité de mesure (SI) d'une force est le newton, symbole N, ( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{S}^{-2}$ )

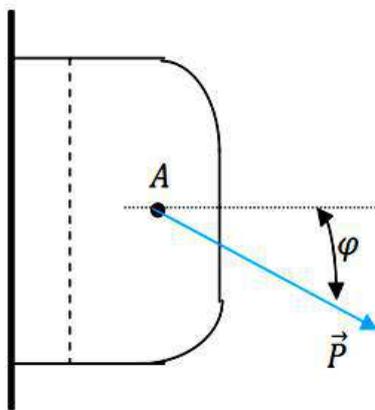


Fig. II.1. Représentation mathématique de la force

### II.2. Classification de forces

Les forces qui agissent sur un corps rigide peuvent être divisées en deux groupes: Forces intérieures et forces extérieures.

### ***II.2.1.Les forces intérieures***

Représentent l'interaction entre l'ensemble des points matériels constituant le corps rigide

### ***II.2.2.Les forces extérieures***

Représentent l'action des autres corps sur le corps étudié.  
- Les forces extérieures sont de deux types : Forces actives et forces réactives (Réaction).

Lorsque l'on étudie la mécanique des corps rigides, ou l'on veut connaître que les effets des forces **extérieures**, l'expérience nous prouve qu'il n'est pas nécessaire de lier l'action de la force active à un point donné (Principe du vecteur glissant). En mécanique des corps rigides, nous allons étudier que presque toutes les forces sont des vecteurs glissants.

## **II.3.Types des forces**

Les phénomènes qui provoquent l'accélération ou la déformation d'un corps sont très divers, on distingue donc plusieurs types de force, mais qui sont tous modélisés par un même objet : le vecteur force. Par exemple, on peut classer les forces selon leur distance

***II.3.1.Forces de contact:*** Les forces de contact sont l'œuvre d'un contact direct et physique entre deux corps. Les forces de masse sont celles dont l'action est centrée à une certaine distance, forces gravitationnelles, magnétiques et électriques)

***II.3.2.Forces surfaciques:*** Lorsqu'une force s'exerce sur une surface, il est parfois intéressant de considérer la répartition de la force selon la surface. Par exemple, si l'on enfonce une punaise dans du bois, la punaise s'enfonce car la force est répartie sur une toute petite surface (l'extrémité de la pointe) ; si l'on appuie simplement avec le doigt, le doigt ne va pas s'enfoncer dans le bois car la force est répartie sur une grande surface (l'extrémité du doigt).

### **Exemple**

- le vent exerce des actions sur toute la surface de la voile

-le vent qui gonfle une force de pression

**II.3.3. Forces volumiques :** Il existe des forces qui s'exercent sur la totalité de l'objet, comme le poids, ces forces sont dites volumiques. On démontre, dans le cas des solides indéformables, que l'action de telles forces est équivalente à l'application d'une seule force au barycentre du corps, encore appelée « centre de masse », « centre de gravité » ou « centre d'inertie ».

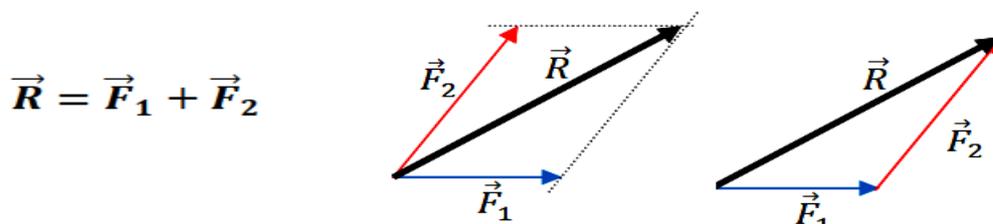
**Exemple:** L'aimant attire les clous. les clous sont attirée par l'aimant. les clous se met en mouvement et se rapproche de l'aimant. Ceci est donc une force qui modifie l'état de repos des clous. La force a donc une direction : dans ce cas, les clous sont déplacé horizontalement vers l'aimant.

#### II.4. Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)

En outre, les forces peuvent être concentrées ou réparties. L'action d'une force est toujours accompagnée par une réaction égale et de sens opposée.

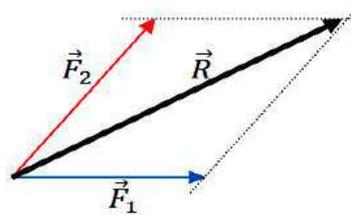
##### II.4.1. composition de deux forces

Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  concourantes peuvent être additionnées en utilisant la loi du parallélogramme afin de trouver leur somme ou résultante  $\vec{R}$ . La règle du triangle est aussi applicable pour déterminer  $\vec{R}$ .



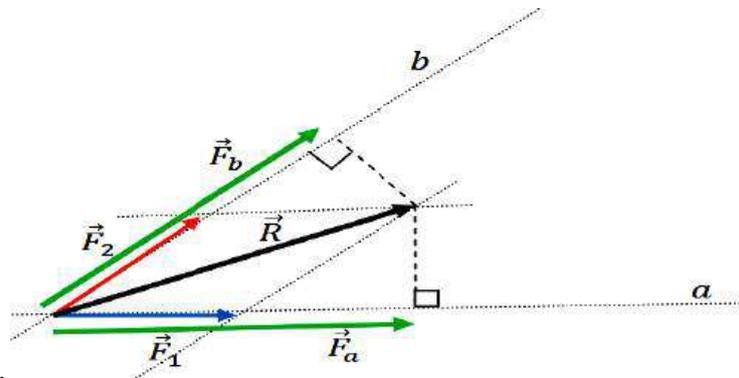
**Fig. II.2a.** Décomposition d'une force

Souvent on doit remplacer une force par ses composantes vectorielles agissant selon des directions spécifiées. C'est ainsi que la force  $\vec{R}$  peut être remplacée ou décomposée en deux composantes vectorielles  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  en appliquant le principe du parallélogramme.



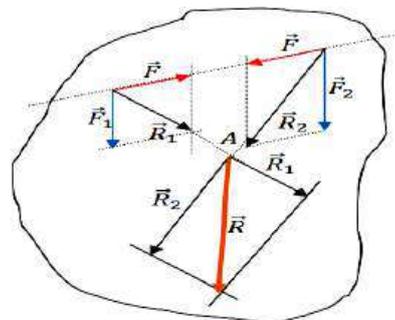
**Fig. II. 2b.** Parallélogramme des forces

**Remarque:** La relation entre une force et ses composantes vectorielles suivant des axes précis ne doit pas être confondue avec la relation entre une force et ses projections perpendiculaires sur ces mêmes axes.



**Fig. II. 2c.** La relation entre une force et ses composantes vectorielles

**II.4.1.a. Cas de deux forces parallèles (Fig. II.3)**



**Fig. II.3.** Forces parallèles

### II.4.2. Composantes rectangulaires

Système d'axe perpendiculaire: (système rectangulaire)

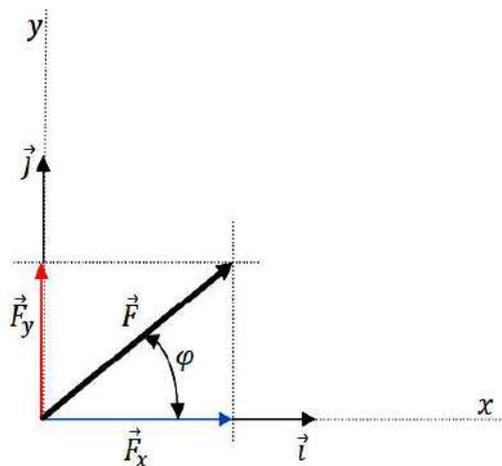
On a  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$  ,  $\vec{F}_x$  et  $\vec{F}_y$  sont les composantes vectorielles de  $\vec{F}$  (rectangulaires).

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$F_x$  et  $F_y$  sont les composantes scalaires de  $\vec{F}$  (selon  $x$  et selon  $y$ ).

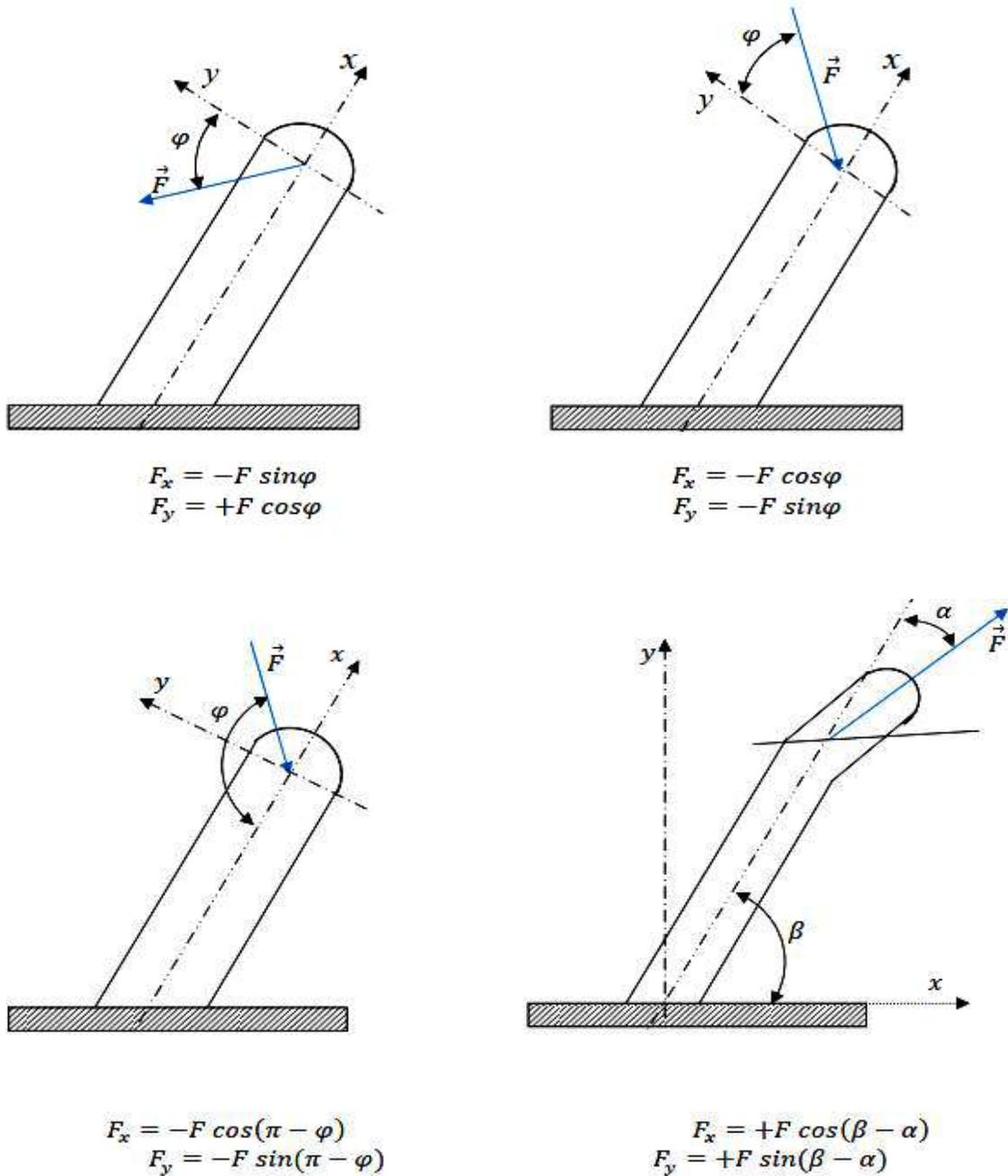
$$F_x = F \cos \varphi , F_y = F \sin \varphi , F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (\text{II-01})$$

Les composantes scalaires d'une force peuvent être positives ou négatives



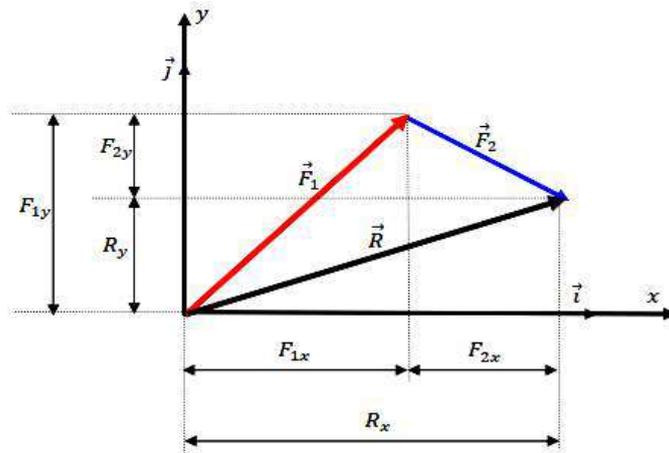
**Fig. II.4.** Composantes rectangulaires

**Exemples:** (Fig. II.5)



**Fig. II.5.** Composantes rectangulaires

Souvent il est commode d'obtenir la somme ou la résultante  $\vec{R}$  de 2 forces concourantes coplanaires en utilisant leurs composantes rectangulaires (Fig. II.5. ) .



**Fig. II.6.** résultante de deux forces concourantes coplanaires

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}) \quad (\text{II-02})$$

$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = (F_{1x} + F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\vec{j} \quad (\text{II-03})$$

$$\text{d'où } R_x = F_{1x} + F_{2x} = \sum F_x \quad (\text{II-04})$$

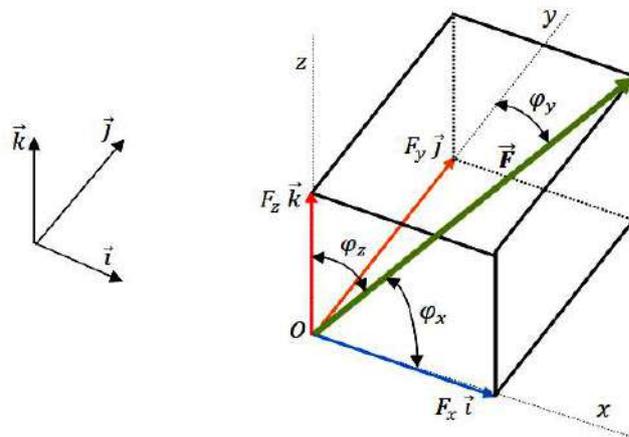
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = \sum F_y \quad (\text{II-05})$$

$\sum F_x$  : Somme algébrique des composantes scalaires selon l'axe 2

$\sum F_y$  : Somme algébrique des composantes scalaires selon l'axe 3

### II.4.3. Systèmes de forces à trois dimensions

#### II.4.3.1. Composantes rectangulaires



**Fig. II.7.** composantes rectangulaires

Très souvent les problèmes rencontrés en mécanique sont définis dans un système à 3 dimensions, d'où la nécessité de décomposer une force en trois composantes perpendiculaires les unes par rapport aux autres.

$\vec{F}$  ayant son point d'application en O a comme composantes rectangulaires  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$ , et  $\vec{F}_z$

$$\text{ou : } \begin{cases} F_x = F \cos\varphi_x \\ F_y = F \cos\varphi_y \\ F_z = F \cos\varphi_z \end{cases} \quad (\text{II-06})$$

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ \vec{F} = F \cos\varphi_x \vec{i} + F \cos\varphi_y \vec{j} + F \cos\varphi_z \vec{k} \end{cases} \quad (\text{II-07})$$

$$\text{Posons } l = \cos\varphi_x, \quad m = \cos\varphi_y, \quad n = \cos\varphi_z \quad \text{ou } (l^2 + m^2 + n^2) = 1 \quad (\text{II-08})$$

$$\vec{F} = F \vec{n}_F \quad (\text{II-09})$$

$\vec{n}_F$  : Vecteur unitaire qui caractérise la direction de  $\vec{F}$

$$\vec{n}_F = l \vec{i} + m \vec{j} + n \vec{k} \quad (\text{II-10})$$

Quand on résout des problèmes en trois dimensions, on doit généralement trouver les composantes scalaires x, y, et z d'une force donnée ou inconnue.

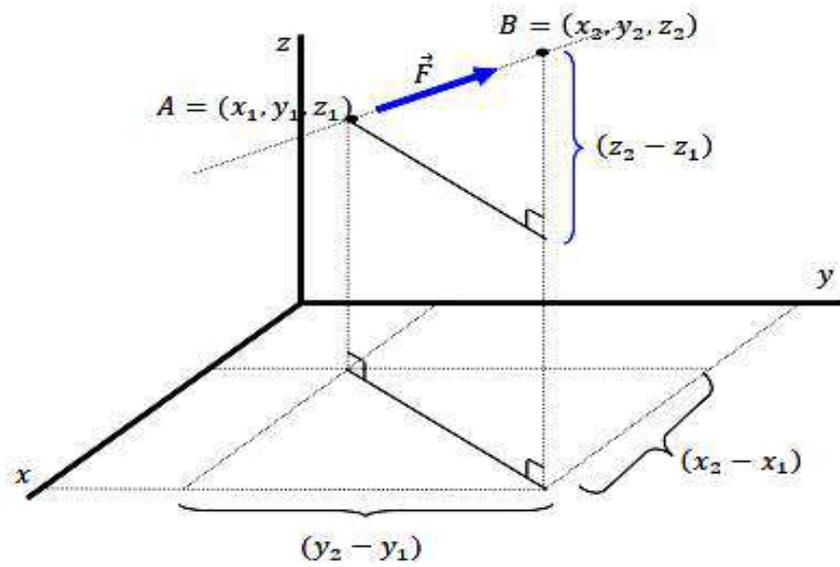
La détermination de direction d'une force se fait au moyen:

- a) de deux (02) points sur la ligne d'action de la force.
- b) De deux (02) angles qui orientent la ligne d'action.

**a) 2 points sur la ligne d'action de la force sont connus:**

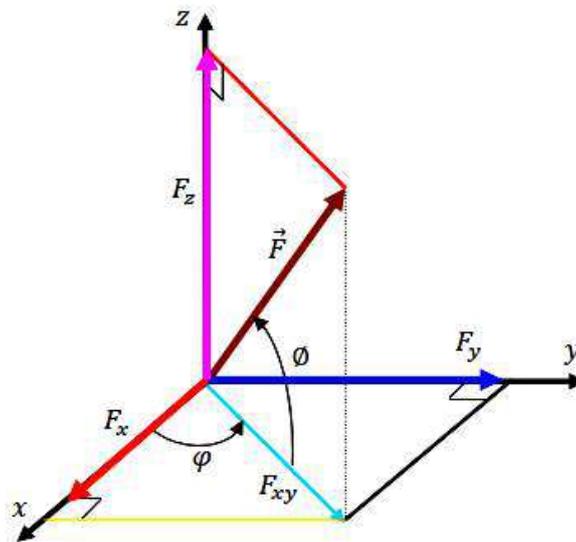
Si les coordonnées de A et B sont connues, on écrit  $\vec{F}$  ainsi:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_F = F \frac{\overline{AB}}{AB} = F \frac{(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \quad (\text{II-11})$$



**Fig.II.8.** deux points sur la ligne d'action de la force.

b) 2 angles qui orientent la ligne d'action sont connues:



**Fig.II.9.** deux angles qui orientent la ligne d'action sont connues:

$$\begin{cases} F_{xy} = F \cos\theta \\ F_z = F \sin\theta \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos\phi = F \cos\theta \cos\phi \\ F_y &= F_{xy} \sin\phi = F \cos\theta \sin\phi \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

## **II.6.Modèles mécanique**

### ***II.6.1.Point matériel***

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

### ***II.6.2.Corps solide parfait***

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante il reste indéformable.

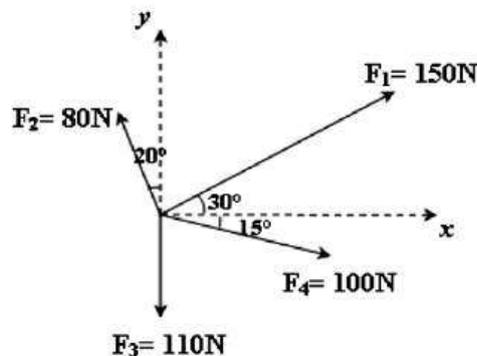
## EXERCICES RESOLUS

**EX:1** La résultante de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  est égale à 50 N et fait un angle de  $30^\circ$  avec la force  $F_1=15$  N. Trouver le module de la force  $\vec{F}_2$  et l'angle entre les deux forces?

**EX:2** Soient deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  faisant chacune respectivement un angle de  $25^\circ$  et  $35^\circ$  avec la résultante  $\vec{R}$  qui a une valeur de 400 N . Déterminer les modules des deux forces.

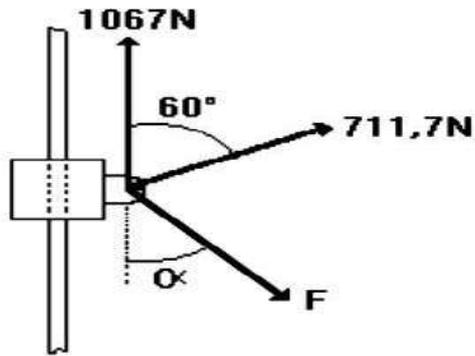
**EX:3** La ligne d'action d'une force  $\vec{F}$  de 800 N, passe par les points (1.22,0,2.74)et (0,1.22,0.61) et dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

**EX:4** Calculer la résultante R des 4 forces appliquées comme le montre la figure.



**EX:5** Un manchon qui peut glisser dans un axe vertical est sollicité par les trois forces représentées. La direction de F peut varier. Dites s'il est possible que F forme avec les deux autres forces une résultante R horizontale, sachant que la grandeur de F est :

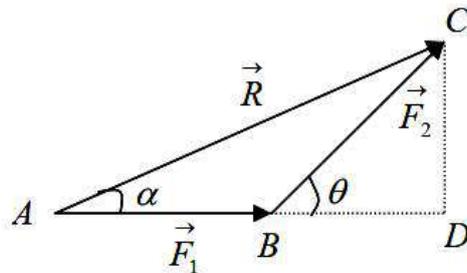
- a) 2135 N , b) 1245 N



## Solutions Exercices

### EX:1

$R = 50 \text{ N}$  ;  $V_1 = 15 \text{ N}$  ,  $\alpha 30^\circ$  , nous avons :  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



Dans le triangle rectangle: ACD rectangle en D, nous avons :  $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$AD = AB + BD = F_1 + F_2 \cos \theta \quad \text{et} \quad DC = F_2 \sin \theta$$

On obtient alors :

$$R^2 = (F_1 + F_2 \cos \theta)^2 + (F_2 \sin \theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{DC}{R} \Rightarrow CD = R \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Nous avons aussi : } \sin \theta = \frac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2 \cdot \sin \theta$$

$$\text{Donc : } R \cdot \sin \alpha = F_2 \cdot \sin \theta \quad (2)$$

$$\text{et } \cos \alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2 \cos \theta}{R} \Rightarrow \cos \theta = \frac{R \cos \alpha - F_1}{F_2} \quad (3)$$

en remplaçant l'expression (3) dans (1), on aboutit à :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \left( \frac{R \cos \alpha - F_1}{F_2} \right) = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 (R \cos \alpha - F_1)$$

$$\text{d'où : } F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2 F_1 (R \cos \alpha - F_1)}$$

$$F_2 = \sqrt{(50)^2 - (15)^2 - 2 (15)(50 \cos 30 - 15)} = 44.44 \text{ N}$$

$$\text{L'expression (3) nous donne : } \cos \theta = \frac{50 \cos 30 - 15}{44.44} = 0.566 \Rightarrow \theta = 55.53^\circ$$

**EX:2** Utilisons la règle des sinus :

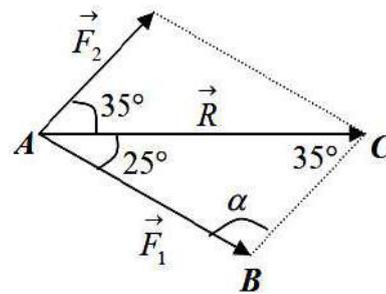
$$\frac{BC}{\sin 25^\circ} = \frac{AB}{\sin 35^\circ} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$\alpha = 180^\circ - (25^\circ + 35^\circ) = 120^\circ$$

or nous avons :  $AB = F_1$  ,  $BC = F_2$

et  $AC = R$

$$\text{D'où : } F_2 = R \frac{\sin 25^\circ}{\sin 120^\circ} = 195 \text{ N} \quad \text{et } F_1 = R \frac{\sin 35^\circ}{\sin 120^\circ} = 265 \text{ N}$$



**EX:3**

Nous avons :  $\vec{AB} = AB \cdot \vec{u}_{AB} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$  vecteur unitaire porté par la ligne d'action .

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{-1.22 \vec{i} + 1.22 \vec{j} - 2.13 \vec{k}}{\sqrt{(-1.22)^2 + (1.22)^2 + (-2.13)^2}} = \frac{-1.22 \vec{i} + 1.22 \vec{j} - 2.13 \vec{k}}{2.74}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0.445 \vec{i} + 0.445 \vec{j} - 0.777 \vec{k}$$

La force  $\vec{F}$  s'écrira :  $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{AB} = 800(-0.445 \vec{i} + 0.445 \vec{j} - 0.777 \vec{k})$

$$\vec{F} = -0.356 \vec{i} + 0.356 \vec{j} - 0.621.6 \vec{k}$$

Les composantes de la force sont ainsi connues suivant les trois axes du repère.

**EX:04**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox :

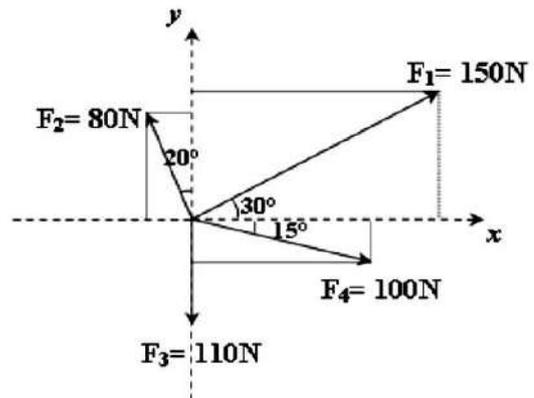
$$R_x = F_1 \cos 30 - F_2 \sin 20 + F_4 \cos 15$$

Sur l'axe oy :

$$R_y = F_1 \sin 30 + F_2 \cos 20 - F_3 - F_4 \sin 15$$

A.N:  $R_x = 199.24\text{N}$  et  $R_y = 14.22\text{N}$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 199.7 \text{ N}$$



**EX:5**

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

La projection sur les axes du repère :

Sur l'axe ox :

$$R = F \sin \alpha + F_2 \cos 30 \dots \dots \dots (1)$$

Sur l'axe oy

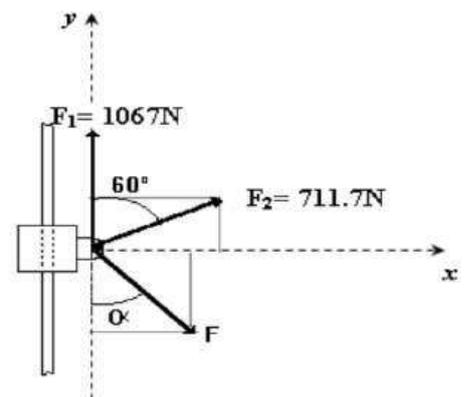
$$0 = -F \cos \alpha + F_2 \sin 30 + F_1 \dots \dots \dots (2)$$

De l'équation (2) :

$$\cos \alpha = \frac{\sin 30 + F_1}{F} \dots \dots \dots (3)$$

A.N :

1<sup>er</sup> cas :  $F = 2135 \text{ N}$  :  $\cos \alpha = 0.66$  donc on peut avoir une résultante horizontale.



2<sup>er</sup> cas :  $F = 1245 \text{ N}$  :  $\cos \alpha = 1.14$  dans ce cas impossible d'avoir une résultante horizontale.

## Chapitre III : Statique

### III.1.Introduction

La statique est la partie de la mécanique rationnelle, qui étudie les forces qui s'exercent sur un objet en équilibre et au repos. On peut, par exemple, déterminer les forces qui interviennent sur les éléments de structure d'une construction tels qu'un pont ou un bâtiment ou encore celles qui s'exercent sur des structures biologiques comme les mâchoires, les membres ou le squelette. La statique permet aussi d'évaluer l'avantage de mécanique obtenu au moyen de machines simples comme, par exemple, les leviers qui interviennent dans le corps humain.

### III.2.Notion principales sur la statique

#### III.2.1.solide parfait

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels ,on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable)

#### III.2.2.Equilibre

Le principal objectif de la statique est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'état d'équilibre aux ouvrages du génie. Quand un corps est en équilibre, le torseur résultant des forces extérieures qui agissent sur lui est nul, donc la force résultante et le moment en tout point sont nuls.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_0 = \sum \vec{M} = \vec{0} \quad (\text{III-01})$$

Ces deux égalités sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre.

A L'équilibre en deux dimensions:

### III.2.2.1. Isolation des systèmes mécaniques

Avant de passer à l'application des équations d'équilibre, il est essentiel de définir avec précision le corps ou le système mécanique qui doit être analysé afin de pouvoir représenter clairement et complètement toutes les forces extérieures qui agissent sur lui. L'omission d'une force ou l'inclusion d'une force qui n'agit pas sur le corps en question aboutiraient à des résultats erronés. Un système mécanique est défini comme un corps ou un jeu de corps qu'il est possible de dissocier de tous les autres corps environnantes. Un tel système est: soit un corps unique ou un ensemble de corps connectés.

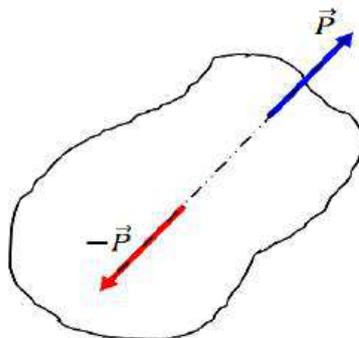
Des que nous avons fait notre choix sur le corps ou l'ensemble de corps que l'on veut analyser, on isole ce corps ou cet ensemble de corps de tous les autres corps ou éléments avec lequel il est en contact. On trace ensuite le schéma du corps libéré sur lequel on applique toutes les forces extérieures qui agissent sur lui. C'est seulement après avoir tracé avec précision ce diagramme que l'on applique les équations d'équilibre de la statique.

### III.3. Conditions d'équilibre

L'équilibre est réalisé quand la force résultante  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{M}$  sont tous les deux (2) nuls:  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$  (III-02)

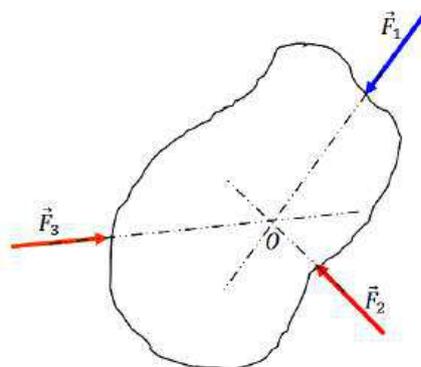
**III.3. a. cas particulier d'équilibre:** (voir tableau)

Equilibre d'un corps soumis à seulement deux forces



**Fig.III.1a.** L' équilibre de deux Forces

Equilibre d'un corps soumis à l'action de trois forces. Elles doivent être concourantes et le triangle des forces est fermé.



**Fig.III.1b.** L' équilibre de trois Forces

CAS PARTICULIER D'EQUILIBRE EN DEUX DIMENSIONS

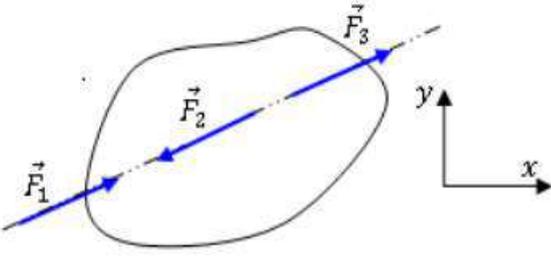
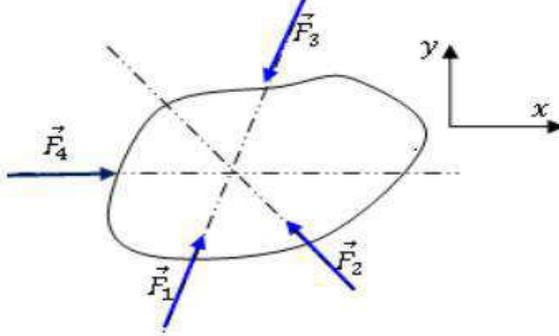
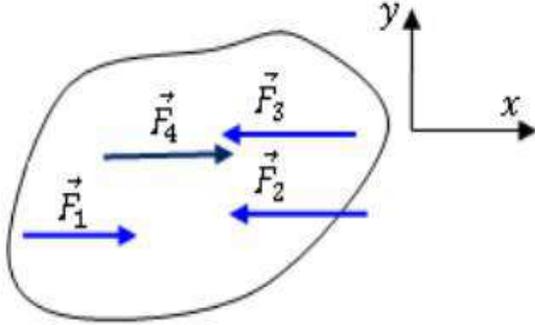
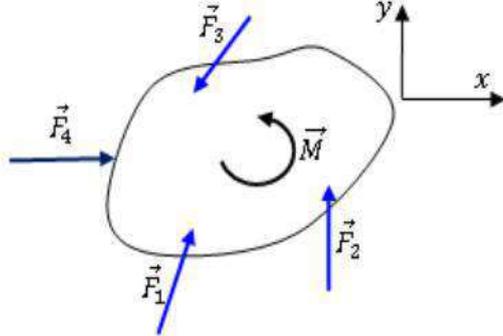
Systèmes de forces	Schéma du corps isolé	Equations indépendantes
1- colinéaires		$\sum F_x = 0$
2- Concourantes a un point		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$
3- parallèles		$\sum F_x = 0$ $\sum M_z = 0$
4- système général		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$

Tableau III.1. D'équilibre en deux dimensions

\* Une particule soumise à deux forces est en équilibre statique si les deux forces ont le même module, la même direction mais de sens opposé tel que leur résultante, soit nulle



**Fig.III.2.** L' équilibre statique de deux forces

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}, F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \quad (\text{III-03})$$

### III.4.Système de forces

Un système de forces, c'est un ensemble de forces agissant sur un corps solide. Si le corps reste toujours au repos sous l'action d'une système de force, le système est appelé système d'équilibre.

Système d'équivalent: Si deux systèmes de forces  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots\}$  et  $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots\}$  appliquè au solide sont dit équivalents s'ils se laissent réduire l'un à l'autre.

Un système de forces équivalent à zéro.

### III. 5.Principe de la statique

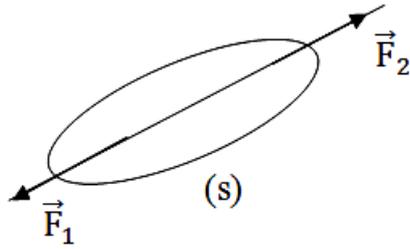
On demande de toutes les théorie et les équations de la statique à partir de plusieurs suppositions quant accepte sans démonstration, et qu'on appelle l'action.

### III.6. Axiomes de la statique

#### III.6.1. Axiome1

Pour deux forces appliqués à un solide parfait se trouve en équilibre ,il faut et il suffit quelles soient de module égal, de sens contraire et portes sur la même droites.

$$F_1 = F_2$$



**Fig.III.3.** L' équilibre de deux forces

### ***III.6.2.Axiome2***

Un système de forces appliqué à un solide parfait reste en équilibre ,si on ajoute ou en relève un système de forces d'équilibre.

### ***III.6.3.Axiome3***

Les forces exercées par deux solide l'un sur autre doivent être de même module, même support et de sens opposées pour réserver l'équilibre.

### ***III.6.4.Axiome4***

Si un système de forces données est équilibré sur un solide ,il reste équilibré sur tout autre solide.

### ***III.6.5.Axiome5***

Si un corps déformable se trouve en équilibre ,il reste aussi après la solidification.

## **III.7. Liaison et réaction**

### ***III.7.1. Définition***

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction par contre le solide est lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels rigide qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés

liaisons, et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons. La direction de vecteur réaction  $\vec{R}$  dépend de la surface de contact :

### III.7.2. Liaisons sans frottements

Dans le cas d'une liaison sans frottement (surface lisse) entre un solide et un plan, la réaction est toujours suivant la normale au plan de contact quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide.

Dans le cas d'un contact ponctuels sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce point :  $\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  (III-04)

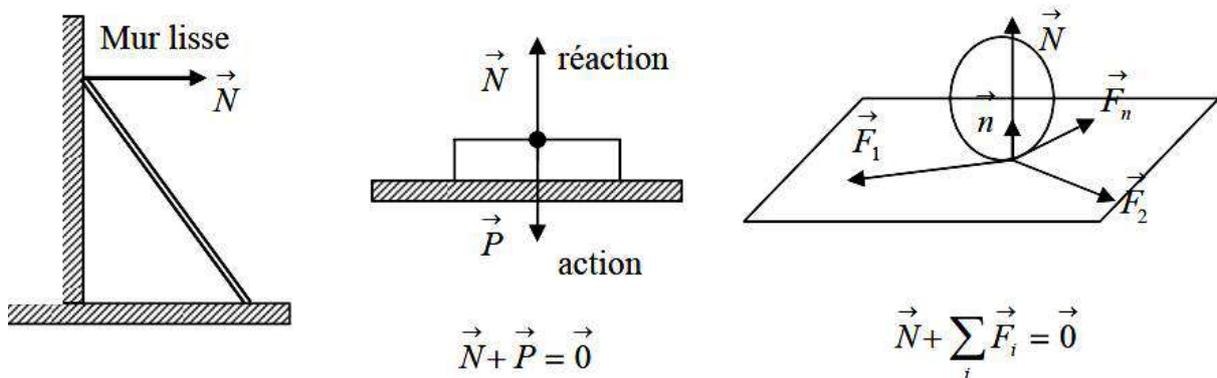


Fig.III.4. Liaisons sans frottements

### III.7.3. Liaisons entre solides avec frottement

La figure .1b représente un corps en état d'équilibre statique. La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids du corps. Appliquons graduellement en un point de ce corps une force horizontale  $\vec{F}$  (fig.III.5 : b.2). il existe alors une contre force  $\vec{T}$  qui équilibre et s'oppose à cette force  $\vec{F}$ .

$\vec{T}$  : est appelée force de frottement statique.

Elle résulte d'un grand nombre de paramètres liés aux états de surfaces, à la nature des matériaux et aux forces de contact entre la pièce et la surface considérée.

Dans le cas d'une surface avec frottements (fig.III.5 : b.3), la condition d'équilibre s'écrira:

$$\vec{N} + \vec{T} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{la somme des actions et des réactions, est nulle}) \quad (\text{III-05})$$

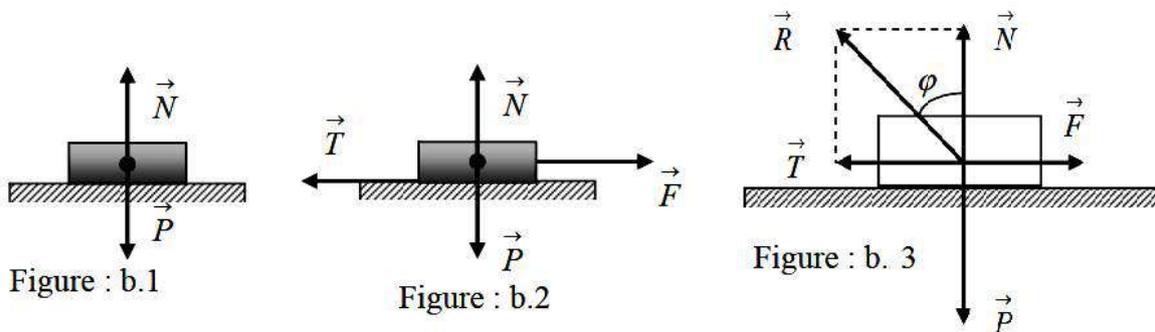
soit  $\mu_0$  :Le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact*) nous pouvons écrire :

$$* \text{ Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : } |\vec{T}| < \mu_0 |\vec{N}| \quad (\text{III-06})$$

$$* \text{ A l'équilibre limite on aura : } |\vec{T}| = \mu_0 |\vec{N}|, \quad \mu_0 = \tan \varphi = \frac{\vec{T}_m}{|\vec{N}|} \quad (\text{III-07})$$

La force de frottement  $\vec{T}$  est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle  $\varphi$  est appelé angle de frottement statique.

Si  $\vec{F} > \vec{T}_m$  le solide se met en mouvement de glissement sur la surface.



**Fig.III. 5.** Liaisons avec frottements

### III.8. Type de liaison

Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, etc.

Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est généralement négligeable.

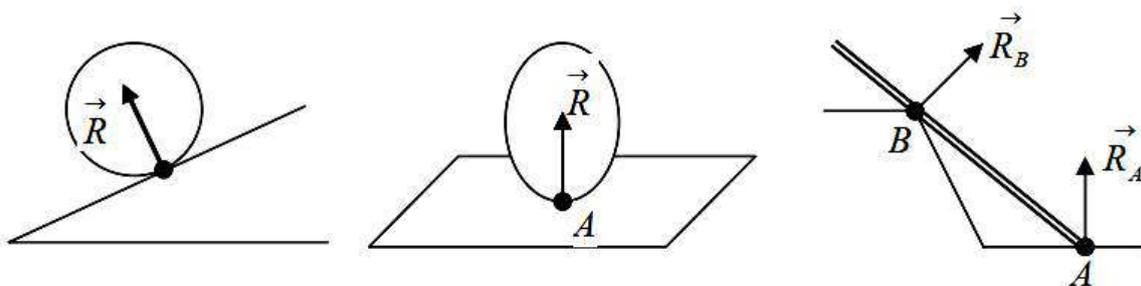
**III.8.1. Liaison ponctuelle (Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse) :**

Le solide repose simplement sur une surface polie dont la réaction est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui.

Dans ce type de liaison l'appui du solide est soit :

**III.8.1.a. Simple**

le solide repose sur un substrat horizontal, vertical où incliné de façon permanente en un seul point de contacte quelque soit la forme du solide (S)



**Fig.III.6.** Liaisons ponctuelle

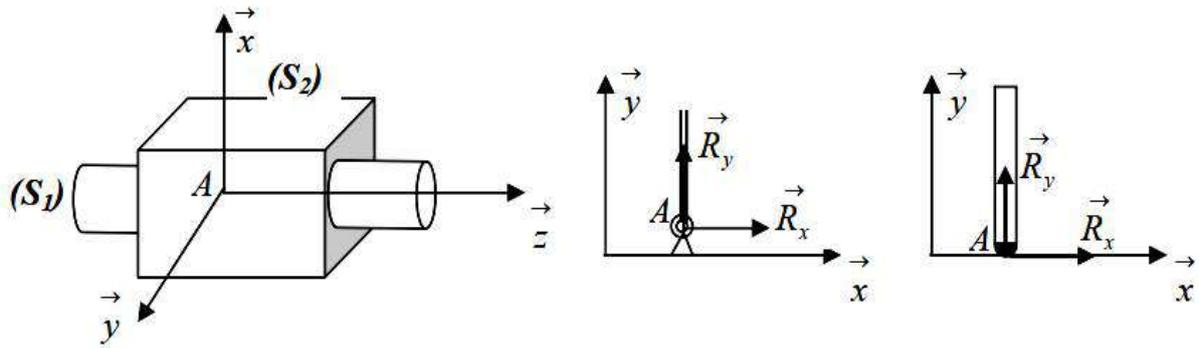
**III.8.2. Articulation d'un solide**

Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

**III.8.2.1. Liaison verrou (Articulation cylindrique)**

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S<sub>1</sub>) a deux degrés de liberté par rapport au solide(S<sub>2</sub>) : Une translation suivant l'axe A<sub>z</sub>, et une rotation autour du même axe.

$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$  avec  $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$  (La réaction suivant l'axe de l'articulation  $R_{Az}$  est nulle). (III-08)

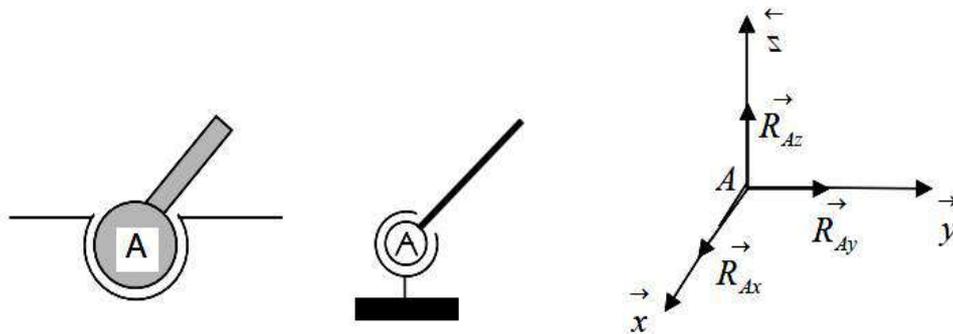


**Fig.III.7.** Liaison verrou (Articulation cylindrique)

### III.8.2.2. Liaison rotule (Articulation sphérique)

le solide peut bouger dans tous les sens de l'espace en restant en contact avec un autre solide comme celles de l'épaule, la hanche humain, les attelages de caravane, les billettes. La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes :

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az} \quad \text{(III-09)}$$



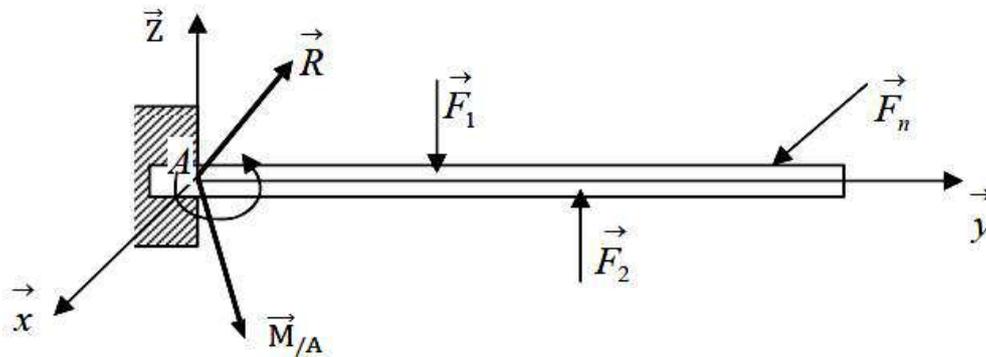
**Fig.III.8.** Liaison rotule (Articulation sphérique)

### III.8.2.3. Encastrement d'un solide

On dit qu'un solide est encasté lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$  : la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A

$\vec{M}_{/A}$ : le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A



**Fig.III.09.** Encastrement d'un solide

$$\vec{M}_{/A} = \sum_i \overline{AM}_i \wedge \vec{F}_i \quad (\text{III-10})$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad (\text{III-11})$$

**Exemple :** appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottements :	$\vec{R}$ : la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ : deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe $Oz$	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$ ; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ : trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

### III.9. Forces concourantes

Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

#### III.9.1. Concourants

les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

Les forces  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_i$  concourantes en O, leur résultante unique  $\vec{R}$  est appliquée en O, et vaut la somme géométrique des vecteurs forces :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_i = \sum_{n=1}^i \vec{F}_n \quad (\text{III-12})$$

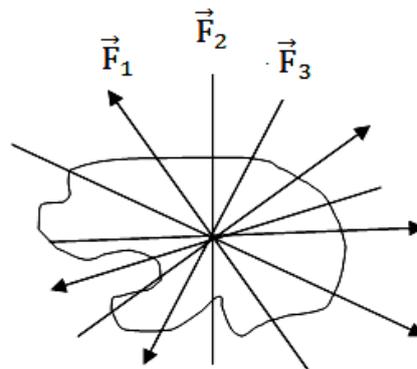


Fig.III.10. Forces concourantes

#### III.9.2. Parallèles

les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'intersectent à l'infini

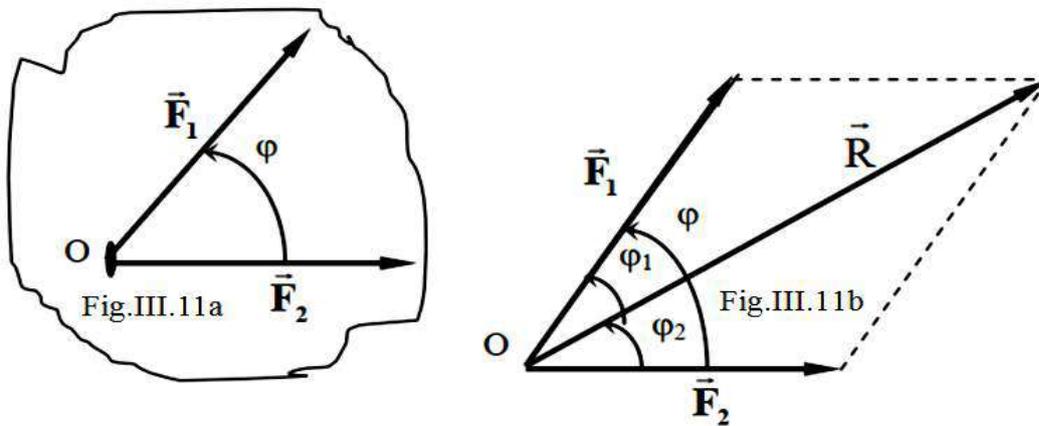
#### III.9.3. Non concourantes et non parallèles

Les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

#### III.9.4. Résultante de deux forces concourantes

Soient deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  appliquées à un point O du solide (Fig.III.11a). Pour la détermination de leur résultante  $\vec{R}$  on construit un parallélogramme sur  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (Fig.III.11b).

Le module et la direction de la résultante  $\vec{R}$  sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (fig.III.11b, Règle du parallélogramme)



**Fig.III.11.** Résultante de deux forces concourantes

On s'écrit :  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

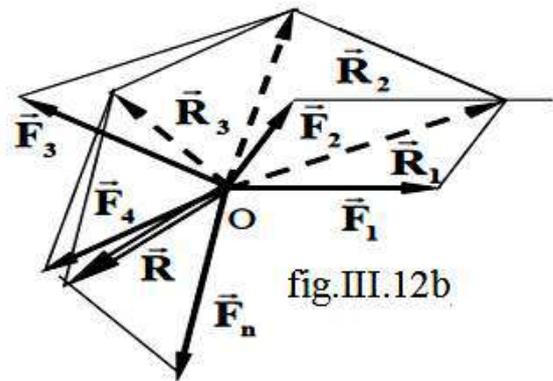
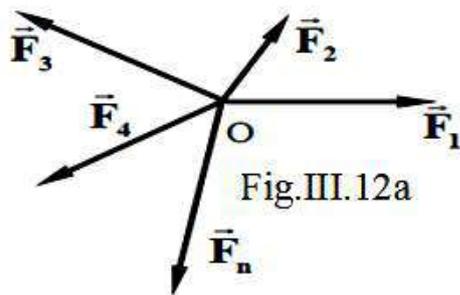
$$\text{Son module s'obtient : } \|\vec{R}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \varphi)} \quad (\text{III-13})$$

$$\text{Et sa direction se détermine : } \frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi} \quad (\text{III-14})$$

### III.9.5. Résultante de plusieurs forces concourantes

#### III.9.5.1. Méthode du parallélogramme des forces

On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun (Fig.III.12a), en faisant leur composition suivant la règle du parallélogramme par composer les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , trouver leur résultante  $\vec{R}_1$  puis composer cette dernière et la force  $\vec{F}_3$ , construire un parallélogramme sur  $\vec{R}_1$  et  $\vec{F}_3$ , trouver la résultante  $\vec{R}_2$  et ainsi de suite (fig.III.12a), jusqu'à obtention de la résultante finale  $\vec{R}$  (en double lignes dans la fig.III.12b).



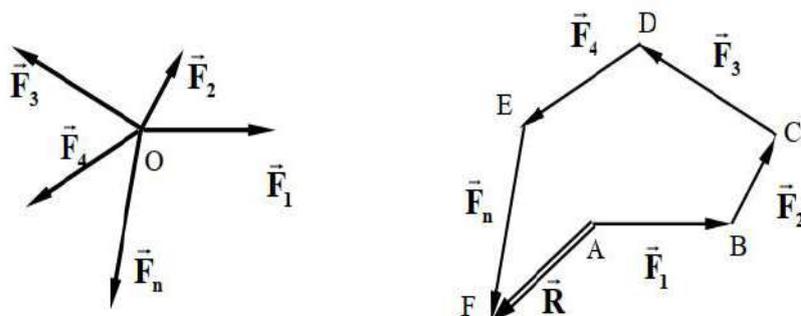
**Fig.III.12.** Résultante plusieurs forces concourantes (Méthode du parallélogramme)

### III.9.5.2. Règle du polygone des forces

Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force.

Tout d'abord, on place l'origine du vecteur  $\vec{F}_2$ , à l'extrémité B de  $\vec{F}_1$ , puis de placer l'origine  $\vec{F}_3$  à l'extrémité C de  $\vec{F}_2$ , ..... etc ; en joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de  $\vec{F}_n$ , on obtient la résultante  $\vec{R}$ . La méthode porte le nom : **La règle du polygone des forces** (Fig.III.13).

La ligne brisée ABDCEF s'appelle polygone des forces et le segment AF, vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.

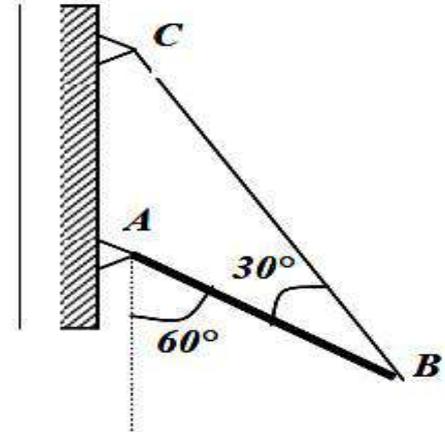


**Fig.III.13.** Règle du polygone des forces

## EXERCICES RESOLUS

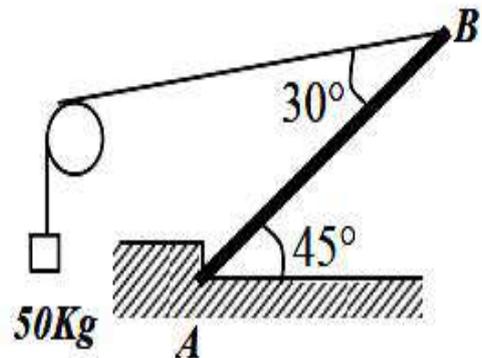
### EX:01

Une barre homogène pesant **80 N** est liée par une articulation cylindrique en son extrémité **A** à un mur. Elle est retenue sous un angle de **60°** avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité **B**. Le câble fait un angle de **30°** avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point **A**



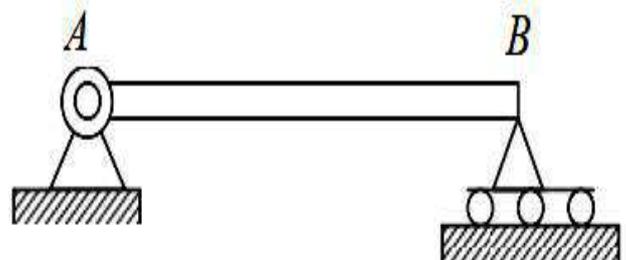
### EX:02

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge **P** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de **8m** et une masse de **50 Kg** et fait un angle de **45°** avec l'horizontale et **30°** avec le câble. Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en **A** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



### EX:03

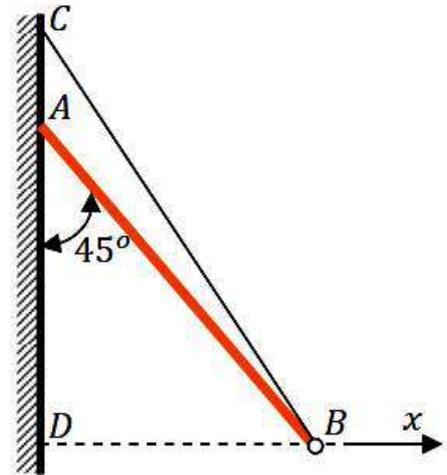
La barre **AB=L** est liée en **A** par une articulation cylindrique et à son extrémité **B**, elle repose sur un appui rouleau. Une force de **200 N** agit en son milieu sous un angle de **45°** dans le plan vertical. La barre a un poids de **50 N**. Déterminer les réactions aux extrémités **A** et **B**.



### EX:04

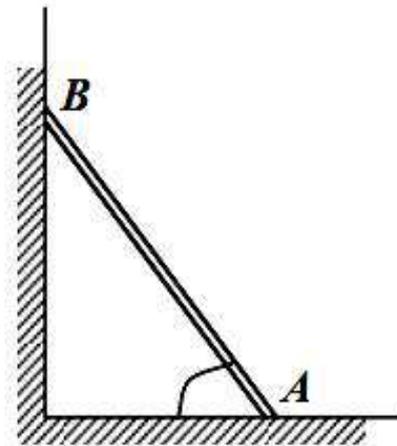
L'extrémité supérieure **A** d'une barre homogène pesant **5 da N** et longue de **2 m** s'appuie sur un mur vertical lisse. Un filin **BC** est attaché à son extrémité inférieure **B**.

- 1) Trouver la distance **AC** a laquelle il faut fixer le filin au mur pour que la barre soit en équilibre en formant un angle de  $45^{\circ}$  avec la verticale.
- 2) Trouver la tension **T** du filin et la réaction **R**.

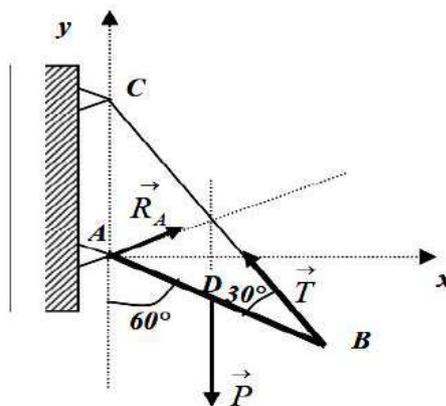


### EX:05

Une échelle de longueur **20 m** pesant **400 N** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à **16 m** du sol. Son centre de gravité est situé à **1/3** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant **700 N** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique. Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.



### EX:01



Le système est en équilibre statique dans le plan (xoy), nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} = \vec{0} \dots\dots\dots(2)$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} L \cos 30^0 \\ L \sin 30^0 \end{cases}, \overrightarrow{AD} \begin{cases} L/2 \cos 30^0 \\ L/2 \sin 30^0 \end{cases}, \vec{P} \begin{cases} 0 \\ -P \end{cases}, \vec{T} \begin{cases} -T \cos 60^0 \\ T \sin 60^0 \end{cases}$$

L'équation (1) projetée sur les axes donne :

$$OX: R_{Ax} - T \cos 60^0 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$Oy: R_{Ay} + T \sin 60^0 - P = 0 \dots\dots\dots(4)$$

L'équation (2) s'écrira :

$$\begin{pmatrix} L \cos 30^0 \\ L \sin 30^0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 60^0 \\ T \sin 60^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \cos 30^0 \\ L/2 \sin 30^0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$LT \cos 30^0 \sin 60^0 + LT \cos 60^0 \sin 30^0 - \frac{PL}{2} \cos 30^0 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$(5) \Rightarrow T = \frac{P}{2} \cos 30^0 = 34.64 \text{ N}$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = T \cos 60^0 = 17.32 \text{ N}$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = P - T \sin 60^0 = 30 \text{ N}$$

d'où :  $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 24.27 \text{ N}$  et l'angle que fait la réaction avec l'axe  $ox$

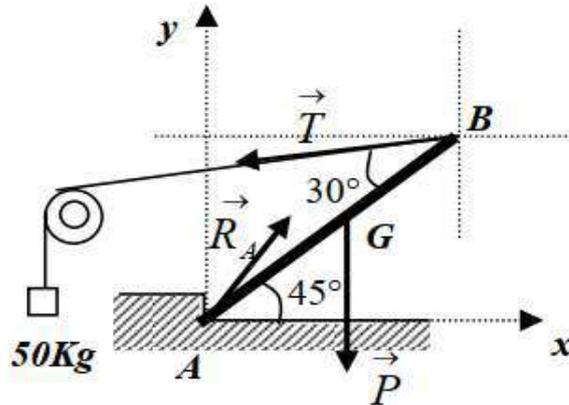
$$\text{est donné par : } \cos \theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0.5 \Rightarrow \theta = 60^0$$

**EX:02**

Toutes les forces agissant sur la poutre sont dans le plan (xoy) . Le système est en

$$\text{équilibre statique d'où: } \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} \wedge \vec{T} + \overline{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \dots\dots\dots (2)$$



Nous avons  $T = P$ ,

et  $\overline{AB} \begin{Bmatrix} L \cos 45^0 \\ L \sin 45^0 \end{Bmatrix}$ ,  $\overline{AG} \begin{Bmatrix} L/2 \cos 45^0 \\ L/2 \sin 45^0 \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{P} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{T} \begin{Bmatrix} -T \cos 15^0 \\ T \sin 15^0 \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{R}_A \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{Bmatrix}$ ,

$\overline{AB} \begin{Bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{Bmatrix}$ ,  $\overline{AG} \begin{Bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{P} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{T} \begin{Bmatrix} -T \cos 15^0 \\ T \sin 15^0 \end{Bmatrix}$ ,  $\vec{R}_A \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{Bmatrix}$ ,

L'équation (1) projetée sur les axes donne :

Ox:  $R_{Ax} - T \cos 15^0 = 0 \dots\dots\dots (3)$

Oy:  $R_{Ay} + T \sin 15^0 - P = 0 \dots\dots\dots (4)$

L'équation (2) s'écrira :

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 15^0 \\ T \sin 15^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -4T\sqrt{2} \sin 15 + 4T\sqrt{2} \cos 15^0 - 2P\sqrt{2} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$(5) \Rightarrow T = \frac{2P\sqrt{2}}{4\sqrt{2} (\cos 15^0 - \sin 15^0)} = 353.55 \text{ N}$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = T \cos 15^0 = 341.5 \text{ N}$$

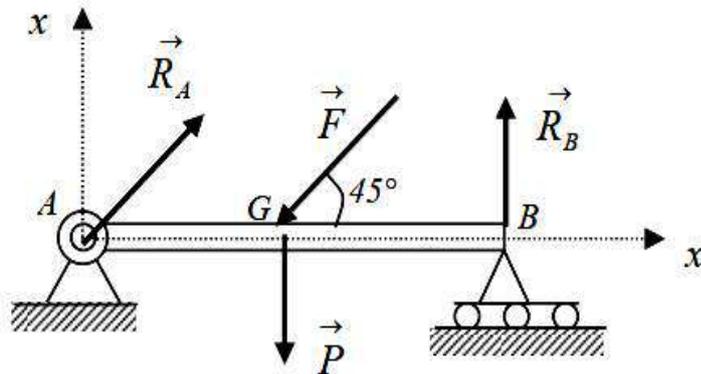
$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = P - T \sin 15^0 = 591.5 \text{ N}$$

d'où :  $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 683 \text{ N}$  et l'angle que fait la réaction avec l'axe  $ox$  est

donné par :  $\cos \theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0.577 \Rightarrow \theta = 54.76^\circ$

**EX:03**

Toutes les forces agissant sur la poutre sont situées dans le plan  $(xoy)$  . Le système est en équilibre statique, nous avons alors :



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} \wedge \vec{R}_B + \overline{AG} \wedge \vec{F} + \overline{AG} \wedge \vec{P} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne :

$$OX: R_{Ax} - F \cos 45^\circ = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$Oy: R_{Ay} + R_B + F \sin 45^\circ - P = 0 \dots\dots\dots(4)$$

En développant l'équation (2) on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F \cos 45^\circ \\ -F \sin 45^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L R_B - \frac{L}{2} F \cos 45^\circ - \frac{LP}{2} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = 95.71 \text{ N}$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = 141.42$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = 95.71 \text{ N}$$

$$\text{d'où } R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170.76 \text{ N}$$

**EX:04**

$$AD = AB \cos 45 = BD \Rightarrow \text{Tg } \varphi = \frac{BD}{CD} = \frac{AB \cos 45^0}{AC + AD}$$

$$\text{Tg } \varphi = \frac{MB}{KM} \quad \text{avec } MB = \frac{AB}{2} \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

$$KM = AD = \sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Tg } \varphi = 26.56^0$$

$$AC = CD - AD = \frac{BD}{\text{Tg } \varphi} - AD = \frac{AB \cos 45^0}{\text{Tg } \varphi} - AD = \frac{2 \cos 45^0}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

A l'équilibre nous avons :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R} + \vec{T} + \vec{P} \dots\dots\dots(1)$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne :

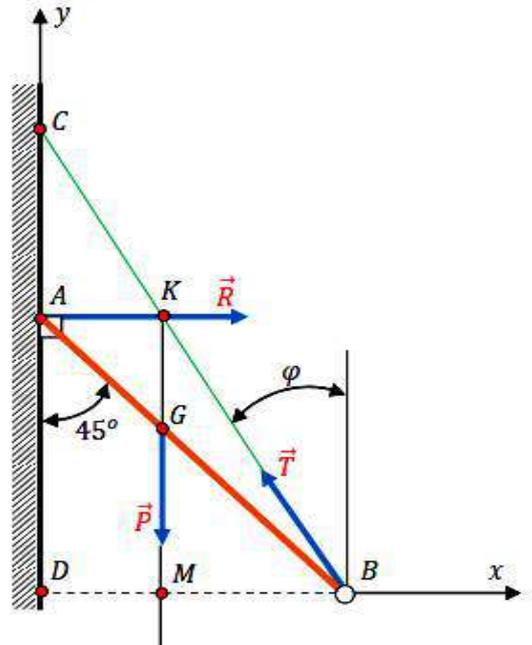
$$\text{OX: } R - F \sin \varphi = 0 \dots\dots\dots(2)$$

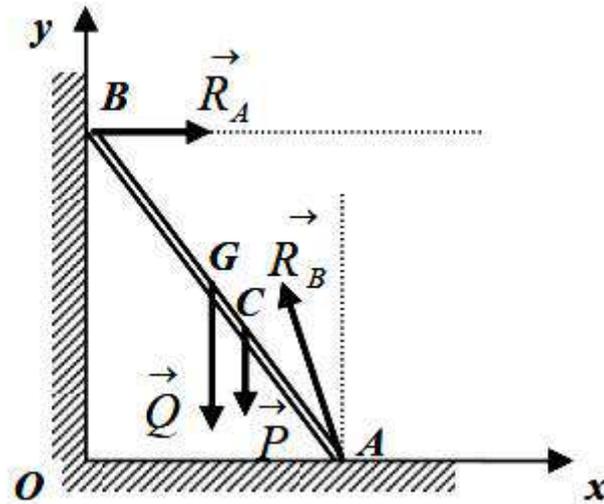
$$\text{Oy: } T \cos \varphi - P = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{De (3)} \Rightarrow T = \frac{P}{\cos \varphi}$$

$$\text{et de (2)} \Rightarrow R = T \sin \varphi = p \text{ tg } \varphi \quad \text{Avec } \varphi = 26.65^0 \Rightarrow \cos \varphi = 0.89$$

$$T = 5.61 \text{ daN}, \quad R = 2.5 \text{ daN}$$





$AB = L = 20 \text{ m}, OB = 16 \text{ m}, Q = 700 \text{ N}, P = 400 \text{ N},$

$$\sin \alpha \frac{OB}{AB} = \frac{16}{20} = 0.8 \Rightarrow \alpha = 53.13^\circ$$

L'échelle est en équilibre statique. La résultante des forces est nulle. Le moment résultant par rapport au point A est aussi nul.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{Q} + \vec{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{P} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

Nous avons aussi :

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} -L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{cases}, \overrightarrow{AG} \begin{cases} -L/2 \cos \alpha \\ L/2 \sin \alpha \end{cases}, \overrightarrow{AC} \begin{cases} -L/3 \cos \alpha \\ L/3 \sin \alpha \end{cases}, \vec{P} \begin{cases} 0 \\ -P \end{cases}, \vec{R}_B \begin{cases} R_B \\ 0 \end{cases}, \vec{Q} \begin{cases} 0 \\ -Q \end{cases},$$

La projection de l'équation (1) sur les axes donne :

$$OX: -R_{Ax} + R_B = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$Oy: R_{Ay} - Q - P = 0 \dots\dots\dots(4)$$

En développant l'équation (2) on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} -L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L/2 \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L/3 \cos \alpha \\ L/3 \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_B L \sin \alpha + Q \frac{L}{2} \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$(5) \Rightarrow R_B = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left( \frac{Q}{2} + \frac{P}{3} \right) = 362.5 \text{ N}$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ax} = R_B = 362.5 \text{ N}$$

$$(4) \Rightarrow R_{Ay} = 1100 \text{ N}$$

$$\text{d'où } R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 1158.34 \text{ N}$$

## Chapitre IV : Cinématique du solide rigide

### IV.1. Introduction

La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, d'un point de vue purement mathématique, indépendamment des causes qui les produisent. L'analyse des grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permet de déterminer la géométrie et les dimensions des composants d'un mécanisme. La cinématique, combinée à l'étude des actions mécaniques, permet l'application du principe fondamental de la dynamique (chapitre étudié ultérieurement)

### VI.2. Cinématique du Point Matériel (Rappel)

#### VI.2.1. Trajectoire, vitesse et accélération d'un point

##### VI.2.1.1. Trajectoire

Soit un point M repéré dans un référentiel  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  fixe. Sa position est déterminée par le vecteur position à l'instant t (Fig. IV.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les coordonnées du point M à l'instant t (Fig. IV.1)

$M(t)$  est la position du point M à l'instant t:

$M'(t + \Delta t)$ : est la position du point M à l'instant  $(t + \Delta t)$ .

$\overrightarrow{MM'}$ : est le vecteur déplacement du point M.

( $\Gamma$ ) S'appelle trajectoire du mobile par rapport au référentiel.

- Si ( $\Gamma$ ) est une droite, le mouvement du point est rectiligne;
- Si ( $\Gamma$ ) est une courbe, le mouvement du point est curviligne.

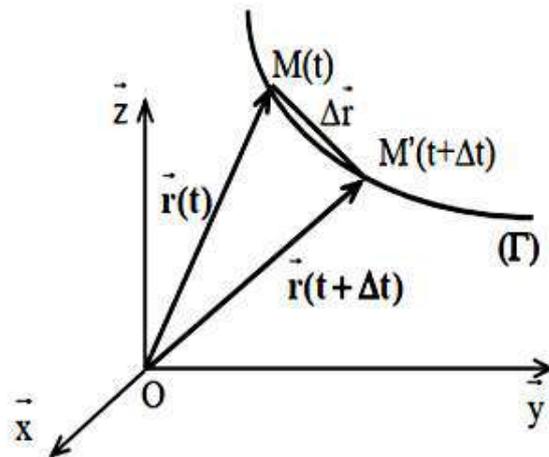


Fig.IV.1 .Trajectoire

## VI.2.2.Loi du Mouvement Rectiligne

*VI.2.2.1.Définition:* On dit un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite ,et curviligne si c'est une courbe.

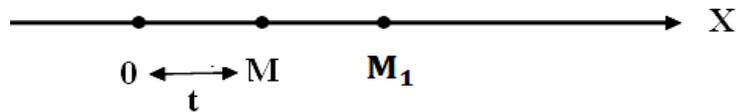


Fig.IV.2 . Mouvement Rectiligne

à l'instant  $t$ : le point se trouve en  $M$  ,et à l'instant  $t_1$ : le point se trouve en  $M_1$  ,donc à  $t$  , $X = OM$  ,

On peut écrire la loi du mouvement rectiligne :  $X = f(t)$  pour trouver la position du point  $M$ .

### *VI.2.2.2.vitesse et accélération du point en mouvement rectiligne*

à l'instant  $t$ : le point se trouve en  $M$

à l'instant  $t_1$ : le point se trouve en  $M_1$

On appelle vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  la grandeur

$$V_{\text{moy}} = \frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{X_1 - X}{t_2 - t_1} \quad (\text{IV-01})$$

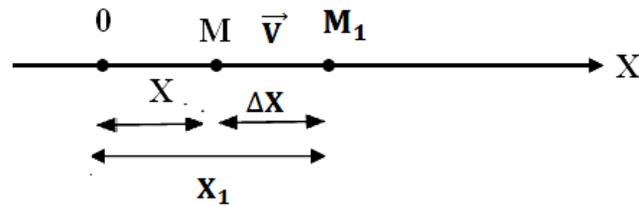


Fig.IV.3 . Vitesse Moyenne

### VI.2.2.3.vitesse instantanée

C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt} = \dot{X}, \text{ en m/s} \quad (\text{IV-02})$$

-Si  $V > 0$  le point se déplace dans le sens croissant

-Si  $V < 0$  le point se déplace dans le sens décroissant .

Durant le mouvement la vitesse peut varier ,la grandeur qui caractérise cette variation est l'accélération du point.

-L'accélération moyenne: est donné par:  $\vec{\gamma}_m = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} \quad (\text{IV-03})$

de la même manière ,on peut définir l'accélération instantanée en  $[m.S^{-2}]$

$$\vec{\gamma}(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = \ddot{X} \quad (\text{IV-04})$$

## VI.3.Types de Mouvement Rectilignes

### VI.3.1.Mouvement uniforme

#### VI.3.1.1.Définition

Un mouvement est dit rectiligne uniforme si la trajectoire est une droite ,et si la vitesse est constante.  $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0$  (constant) (IV-05)

$$X(t) = V_0 t + X_0 \quad (\text{IV-06})$$

$X_0$  :position du point à l'instant  $t = 0$

$$V = \dot{X}, \gamma = \ddot{X} = \dot{V} = 0 \quad (\text{IV-07})$$

### VI.3.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

✓ Rectiligne : mouvement en ligne droite (Trajectoire rectiligne :  $(x'Ox)$ )

✓ Uniformément varié : à accélération constante

$$\gamma(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma_0 \text{ (constante)} \quad (\text{IV-08})$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0, \gamma = \ddot{X} = \dot{V} = \text{constant} \quad (\text{IV-09})$$

\*  $\vec{\gamma} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow$  mouvement accéléré

\*  $\vec{\gamma} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow$  mouvement retardé

## VI.4. Mouvement circulaire

### VI.4.1. Cinématique de Rotation du point matériel

Considérons un point matériel M décrivant un cercle de centre O et de rayon R.

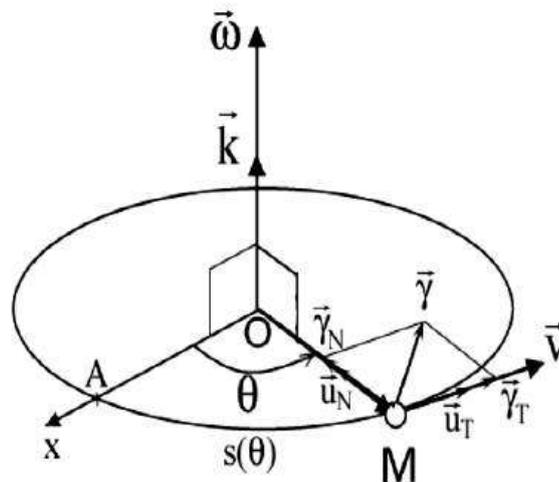


Fig.IV.4 . Mouvement Circulaire

L'arc  $\widehat{AM}$  représente l'abscisse curviligne de M :  $s(M) = s(\theta) = R\theta$  (IV-10)

-Le vecteur vitesse linéaire  $\vec{V}$  est tangent à la trajectoire.

- Le module du vecteur vitesse est :  $V = \frac{ds}{dt} = R \cdot \dot{\theta}$  (IV-11)

- La vitesse angulaire du point M autour de O est :  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  (IV-12)

- Le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est porté par l'axe perpendiculaire au plan de rotation du point matériel et son sens est donné par la «règle du tournevis » :  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{K}$  (IV-13)

-La relation vectorielle reliant le vecteur vitesse linéaire  $\vec{V}$ , et le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est :  $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$  (IV-14)

- L'accélération linéaire du point M est :  $\vec{\gamma} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$  (IV-15)

-Le vecteur accélération angulaire est :  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{K} = \ddot{\theta} \vec{K}$  (IV-16)

-L'accélération tangentielle est :  $\gamma_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R \frac{d\ddot{\theta}}{dt} = R \cdot \alpha$  (IV-17)

- L'accélération normale (ou accélération centripète) est :

$$\gamma_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 \quad (IV-18)$$

\* Dans le cas du mouvement circulaire uniformément varié, on peut établir des relations analogues au cas du mouvement rectiligne uniformément varié :

1/ Equation horaire du mouvement de M dans le cas d'un mouvement circulaire uniformément varié (accélération angulaire  $\alpha$  constante) avec pour condition initiale : à  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  et  $\omega = \omega_0$  et:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0 \quad (IV-19)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t + \omega_0 \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

2/ Relation entre  $\theta$ ,  $\omega$  et  $\alpha$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \alpha \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\alpha^2} + \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} + \theta_0 \Rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0}{\alpha} + 2\omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

(IV-20)

Conclusion : Correspondances entre les grandeurs linéaires et les grandeurs angulaires

Mouvement rectiligne uniformément varié	unité	Mouvement circulaire uniformément varié	unité
Position : $x$	m	Position : $\theta$	rd
Vitesse linéaire : $v = \frac{dx}{dt}$	m/s	Vitesse angulaire : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	rd/s
Accélération linéaire : $\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	m/s <sup>2</sup>	Accélération angulaire : $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	rd/s <sup>2</sup>
$v(t) = \gamma t + v_0$	m/s	$\omega(t) = \alpha t + \omega_0$	rd/s
$x(t) = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0$	m	$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$	rd
$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$	-	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	-

## VI.4.2. Cinématique du corps solide

### VI.4.2.1. Notion d'un solide parfait

Un solide (S) parfait, est un ensemble d'éléments matériels, dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points ne sont pas indépendantes. D'ici, la cinématique du solide traite la distribution des vitesses des points dans un corps, indépendamment des causes qui ont engendré le mouvement du solide.

### VI.4.2.2. Repérage d'un solide

On étudie le mouvement d'un point O du solide (S) par rapport à un observateur lié au référentiel  $R_0$ , comme le montre la ( Fig.IV.5). Si ce mouvement n'est pas simple, il peut être avantageux de faire apparaître le mouvement de O par rapport à un repère intermédiaire R issu de O, et lié à (S).

On repère le mouvement de (O) en deux temps:

- Mouvement de (O) par rapport à  $R_0$  (3 degrés de liberté)
- Mouvement autour de M considérée fixe, c'est à dire le mouvement de R par rapport à  $R_k$  (M est l'origine de  $R_k$  et ces axes sont couramment parallèles à ceux de  $R_0$ )

- On peut passer de  $R_k$  à  $R_0$  par 3 rotations ordonnées au plus (3 degrés de liberté dans le mouvement de R par rapport à  $R_k$ )

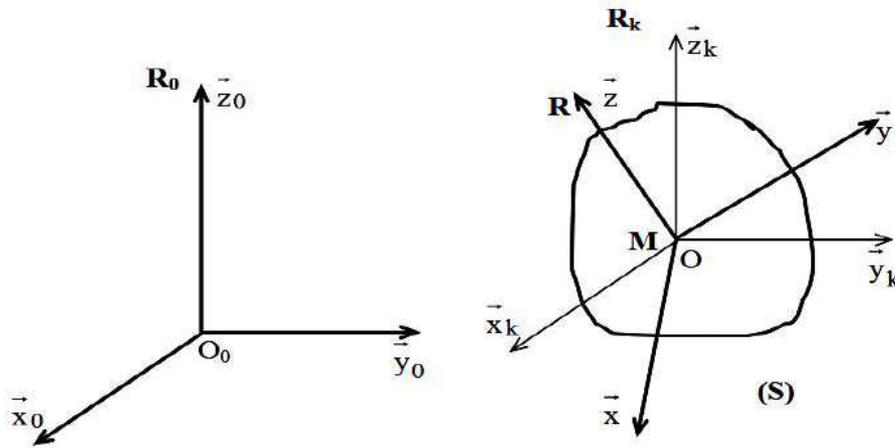


Fig.IV.5. Repérage d'un solide

Le solide a donc au total 6 degrés de liberté. Son mouvement est entièrement repéré par les 3 coordonnées de M par rapport à  $R_0$ , et 3 angles. Pour cela, on considère le mouvement du solide (S) autour de  $O_0$  comme fixe et l'origine du repère  $R_0$ . Ici, on considère que le point O coïncide avec  $O_0$ . Un tel mouvement peut être réalisé par une articulation sphérique. On peut transformer R en  $R_0$  par trois rotations successives, qui définissent les angles d'Euler de type I.

#### VI.4.2.3. Matrice de passage de R à $R_0$

Les angles d'Euler sont utilisés quand l'intersection des plans  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  existe. Cette intersection s'appelle ligne des nœuds. On passe du repère  $R_0$  au repère R à l'aide de deux repères intermédiaires  $R_1$  et  $R_2$  qui seront définis par la suite.

#### VI.4.2.4. Angle de précession

Un axe de  $R_1$  est confondu avec  $R_0$  ( $Z = Z_0$ ). Soit  $u(O, \vec{u})$  l'axe porté par la droite d'intersection des plans  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . L'angle de précession est définie par  $\Psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$  (Figure 3.4). On a alors un nouveau repère  $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ .

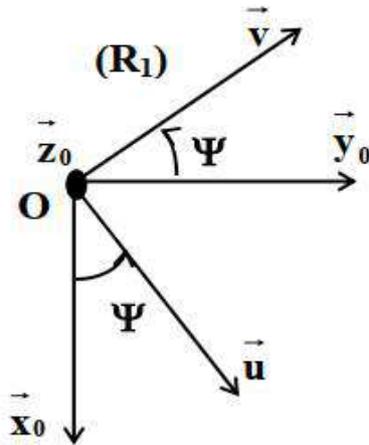


Fig.IV.6. Angle de précession

Le vecteur taux de rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  est :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \frac{d\Psi}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\Psi} \vec{z}_0 \quad (\text{IV-21})$$

Les nouveaux axes de  $R_1$  sont définis par :

$$\vec{u} = \cos \psi \vec{x}_0 + \sin \psi \vec{y}_0 \quad , \quad \vec{v} = -\sin \psi \vec{x}_0 + \cos \psi \vec{y}_0 \quad (\text{IV-22})$$

#### VI.4.2.5. Angle de nutation

On fait subir au repère  $R_1$  une rotation autour de l'axe  $(O, \vec{u})$ . L'angle de nutation  $\theta$  est défini par  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$  (Fig.IV.7.). On a alors un nouveau repère  $R_2 (O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ .

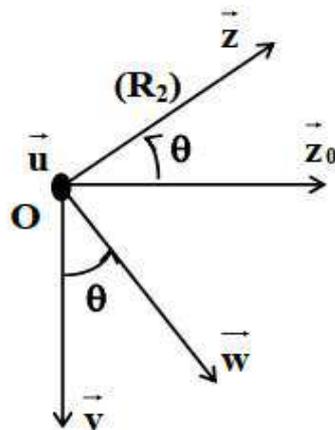


Fig.IV.7. Angle de nutation

Ce nouveau repère  $R_2$  est appelé repère de Résal. Le vecteur taux de rotation de  $R_2$  par rapport à  $R_1$  est:  $\vec{\Omega}(R_2 / R_1) = \frac{d\theta}{dt} \vec{u} = \dot{\theta} \vec{u}$  (IV-23)

Les axes de  $R_2$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= -\cos\theta \sin\psi \vec{x}_0 + \cos\theta \sin\psi \vec{y}_0 + \sin\theta \vec{z}_0 \\ \vec{z} &= \sin\theta \sin\psi \vec{x}_0 + \sin\theta \cos\psi \vec{y}_0 + \cos\theta \vec{z}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

#### VI.4.2.6. Angle de rotation propre

On fait subir au repère  $R_2$  une rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z})$  (Fig.IV.). L'angle de rotation propre  $\phi$  est défini par  $\phi = (\vec{u}, \vec{x})$ . On arrive au repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

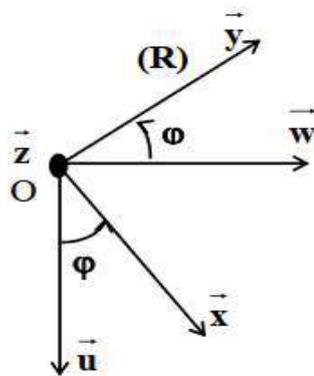


Fig.IV.8. Angle de rotation propre

Le vecteur taux de rotation de  $R$  par rapport à  $R_2$  est :

$$\vec{\Omega}(R / R_2) = \frac{d\phi}{dt} \vec{z} = \dot{\phi} \vec{z} \quad (\text{IV-25})$$

Les axes de  $R$  sont définis par :  $\vec{x} = \cos\phi \vec{u} + \sin\phi \vec{w}$  ,  $\vec{y} = -\sin\phi \vec{u} + \cos\phi \vec{w}$

La matrice de passage de  $R$  à  $R_0$  est indiquée dans le tableau IV.1

	$\vec{x}_0$	$\vec{y}_0$	$\vec{z}_0$
$\vec{x}$	$\cos\phi \cos\psi - \cos\theta \sin\phi \sin\psi$	$\cos\phi \sin\psi + \cos\theta \sin\phi \cos\psi$	$\sin\theta \sin\phi$
$\vec{y}$	$-\sin\phi \cos\psi - \cos\theta \cos\phi \sin\psi$	$-\sin\phi \sin\psi + \cos\theta \cos\phi$	$\sin\theta \cos\phi$
$\vec{z}$	$\sin\theta \sin\psi$	$-\sin\theta \cos\psi$	$\cos\theta$

Tableau IV.1. Matrice de passage de  $R$  à  $R_0$

Le vecteur taux de rotation instantané de R par rapport à R<sub>0</sub> s'écrit :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z} \quad (\text{IV-26})$$

Ce vecteur s'écrit différemment suivant qu'il est exprimé sur R<sub>0</sub> où sur R :

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad (\text{IV-27})$$

Où

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (\text{IV-28})$$

La Figure IV-9 résume le passage du repère R au repère R<sub>0</sub> par les trois angles d'Euler de type I.

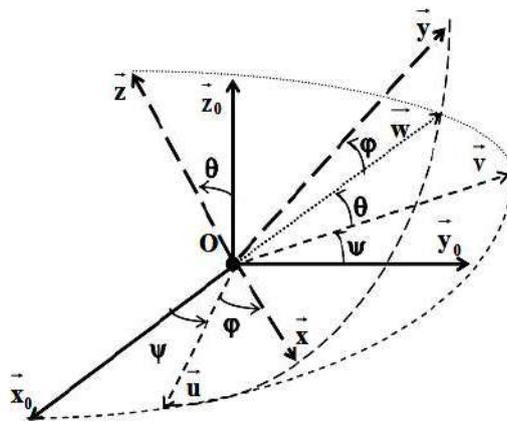


Fig.IV.9. Angles d'Euler type I

#### IV.5. Mouvement de translation

Pour un mouvement de translation, à un instant donné, les vecteurs vitesses de tous les points du solide sont égaux et le vecteur taux de rotation est nul (Figure IV.10).

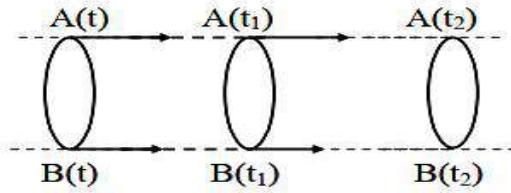


Fig.IV.10. Mouvement de translation rectiligne

$$\vec{\Omega} = 0, \vec{V}_A = \vec{V}_B, \forall (A, B) \in \text{solide}$$

Si les trajectoires des points du solide sont rectilignes (figure IV.10), nous parlerons de translation rectiligne. Si, de plus, leurs vitesses respectives sont constantes au cours du temps, nous aurons une translation rectiligne uniforme.

#### IV5.1. Mouvement de rotation autour d'un axe

Le solide en rotation possède une liaison rotoïde ou pivot avec le solide de référence: chaque point du solide décrit alors une trajectoire circulaire autour de l'axe du rotoïde constituant l'axe instantané de rotation (Figure IV.11).

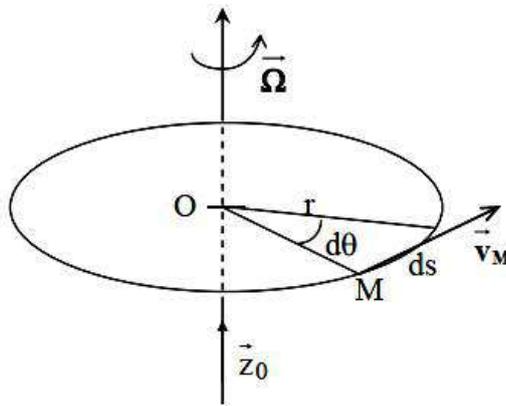


Fig.IV.11. Mouvement de rotation autour d'un axe

Si O appartient à l'axe fixe du vecteur directeur  $\vec{z}_0$ , on a alors :  $\vec{V}_M = \overline{MO} \wedge \vec{\Omega}$

Cela est possible si  $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{z}_0$  est colinéaire à  $\vec{z}_0$

Or par définition, nous avons :  $\|\vec{V}_M\| = \frac{ds}{dt} = R \cdot \dot{\theta}$  et :  $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z} = \dot{\theta} \vec{z}$  (IV-29)

si un solide est soumis à la rotation autour d'un axe de vecteur directeur  $\vec{z}_0$  à une vitesse  $\dot{\theta}$  dans le sens direct, le vecteur taux de rotation instantané de ce solide s'écrit :  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}$

## IV.6. Mouvement Plan sur Plan

### IV.6.1. Définition

Un mouvement plan sur plan représente le mouvement d'une figure plane (section d'un solide par exemple) qui reste parallèle à un plan fixe  $P_0$  et à une distance constante (Figure IV.12). Tous les vecteurs vitesses de la figure plane considérée sont parallèles au plan  $P_0$ .

On ramène l'étude du mouvement de la figure plane considérée au mouvement de sa projection sur  $P_0$ .

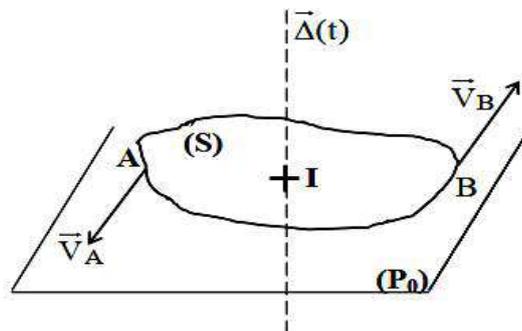


Fig.IV.12. Mouvement plan sur plan

Le mouvement de tout point du solide est déterminé dès que l'on connaît le Mouvement de sa projection dans le plan de référence.

### IV.6.2. Centre instantané de rotation (CIR)

Soient deux points A et B d'un solide (S) en mouvement plan sur plan (Figure IV.12), et les vecteurs vitesses  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  appartiennent au plan  $P_0$ . D'après la loi de distribution des vitesses  $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$ , le produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$  appartient aussi au plan  $P_0$ .

Le vecteur taux de rotation  $\Omega$  est donc normal au plan  $P_0$ , ce qui signifie que l'axe instantané de rotation  $\Delta(t)$  est perpendiculaire à  $P_0$ . Or, par définition, tous les points de l'axe instantané de rotation ont une vitesse parallèle à cet axe. De plus, dans le cas d'un mouvement plan sur plan, les vitesses sont parallèles au plan  $P_0$ . Par conséquent, le point d'intersection entre le plan  $P_0$  et l'axe instantané de rotation a une vitesse nulle. Ce point est appelé centre instantané de rotation (CIR).

## IV.7. Mouvement composé

### IV.7.1. Dérivation composée (Rappel)

Soit le repère orthonormé  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , lié au solide (Figure IV.13.), et un repère fixe  $R(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

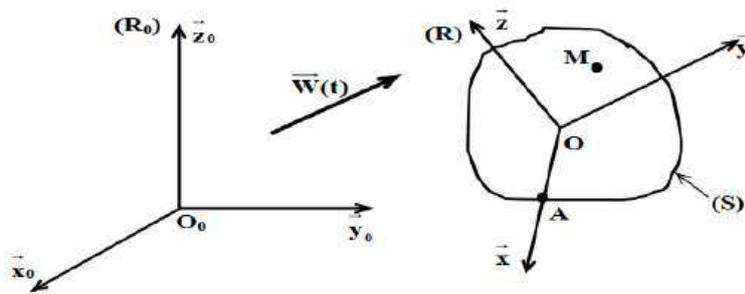


Fig. IV.13. Composition de mouvements

On détermine l'expression de la dérivée de  $(\frac{d\vec{x}}{dt})$  par rapport au temps  $t$ . Soit  $A$  le point tel que  $OA = x$ , on peut alors écrire :  $\vec{V}_A = \vec{V}_0 = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$  (IV-30)

$$\text{or } \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{V}_A - \vec{V}_0 = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AO} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x} \quad (\text{IV-31})$$

On a donc, plus généralement, la formule de base mobile :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x}, \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y}, \quad \frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{z} \quad (\text{IV-32})$$

Soit un vecteur  $\vec{W} = W(t)$  représentatif d'une grandeur physique variable dans les repères  $R_0$  et  $R$  (Figure.IV.13) et dans le temps, soient  $x_0, y_0$  et  $z_0$  les composantes de  $\vec{W}(t)$  dans  $R_0$  au temps  $t$ , on écrit :

$$\vec{W}(t) = x(t) \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_0 + z(t) \vec{z}_0 \quad (\text{IV-33})$$

Soient  $x, y$  et  $z$  les composantes de  $\vec{W}(t)$  dans  $R$  au temps  $t$ :

$$\vec{W}(t) = x(t) \vec{x} + y(t) \vec{y} + z(t) \vec{z} \quad (\text{IV-35})$$

On appelle dérivée de  $\vec{W}(t)$  par rapport à  $t$  dans les repères  $R_0$  et  $R$  respectivement :

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}_0(t) \vec{x}_0 + \dot{y}_0(t) \vec{y}_0 + \dot{z}_0(t) \vec{z}_0 \quad (\text{IV-36})$$

et

$$\frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}(t) \vec{x}_0 + \dot{y}(t) \vec{y}_0 + \dot{z}(t) \vec{z}_0 \quad (\text{IV-37})$$

La dérivée de  $\vec{W}(t)$  exprimé dans le repère  $R$  par rapport à  $t$  et par rapport à  $R_0$  s'écrit:

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \dot{x}_0 \vec{x} + \dot{y}_0 \vec{y} + \dot{z}_0 \vec{z} + x \frac{d^{R_0} \vec{x}}{dt} + y \frac{d^{R_0} \vec{y}}{dt} + z \frac{d^{R_0} \vec{z}}{dt} \quad (\text{IV-38})$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + x \frac{d^{R_0} \vec{x}}{dt} + y \frac{d^{R_0} \vec{y}}{dt} + z \frac{d^{R_0} \vec{z}}{dt} \quad (\text{IV-39})$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + x (\vec{\Omega}_{s/R_0} \wedge \vec{x}) + y (\vec{\Omega}_{s/R_0} \wedge \vec{y}) + z (\vec{\Omega}_{s/R_0} \wedge \vec{z})$$

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{s/R_0} (x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}) \quad (\text{IV-40})$$

où la règle de dérivation composée ou règle de dérivation dans un repère mobile :

$$\frac{d^{R_0} \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^R \vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_{s/R_0} \wedge \vec{W}(t) \quad (\text{IV-41})$$

Dans le cas particulier où  $\vec{W}(t) = \vec{\Omega}_{S/R_1}$ , nous remarquons que :

$$\frac{d^{R_1}}{dt} \vec{\Omega}_{S/R_1} = \frac{d^R}{dt} \vec{\Omega}_{S/R_1} \quad (\text{IV-42})$$

### EXERCICES RESOLUS

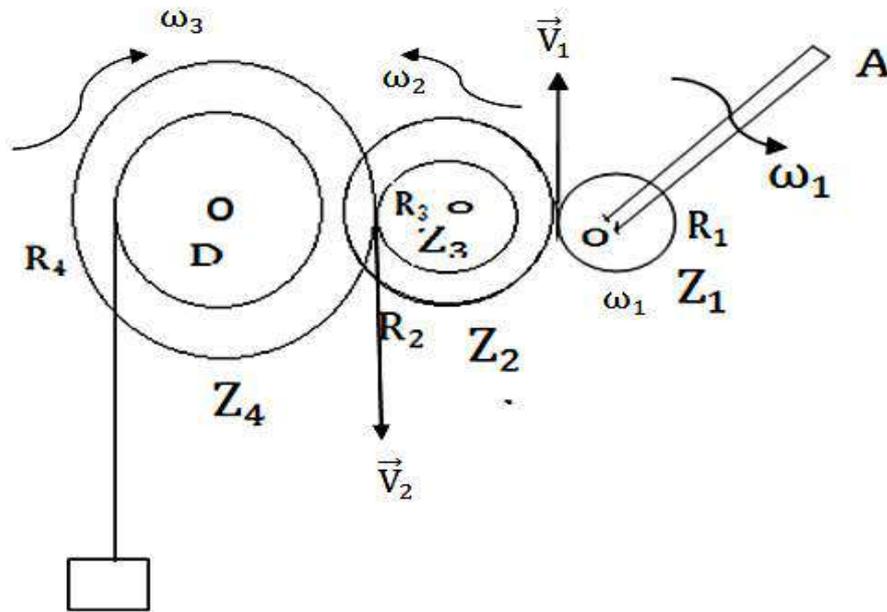
**EX01:** Une voiture attend à un feu rouge .quand le feu passe au vert ,la voiture accélère uniformément pendant 6s avec une accélération de  $2 \text{ m / s}^2$  ,après elle se déplace avec une vitesse uniforme .Au moment où la voiture démarre au feu vert , un camion se déplaçant dans la même direction ,avec une vitesse uniforme de  $10 \text{ m/s}$  .Au bout de combien de temps ,et à quelle distance du feu ,la voiture ,la voiture et le camion se rattraperont-ils ?

**EX02:** Un point matériel par court une circonférence de rayon  $8 \text{ m}$  , la loi du mouvement est :  $S = \frac{2}{3} t^2$ . On demande de savoir la vitesse du point à l'instant  $t_1$  où l'accélération normale et l'accélération tangentielle deviennent égales en module.

**EX03:** Une roue immobile au départ est accélérée de telle sorte que sa vitesse angulaire croît régulièrement jusqu'a  $200 \text{ tr /min}$  en  $6\text{s}$  .Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse ,on freine et il faut  $5 \text{ min}$  pour arrêter la roue , le nombre total de tours étant de  $3100$  .

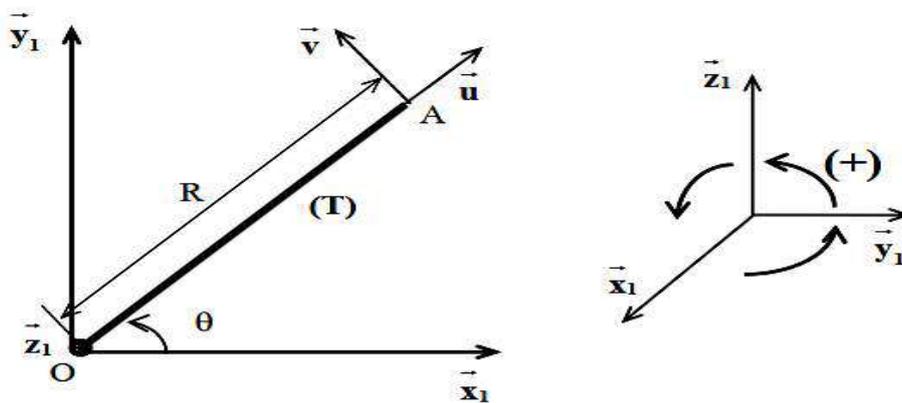
Calculer le temps total de rotation.

**EX04:** La manivelle OA du treuil est tournée de façon uniformément accéléré avec une accélération  $\alpha_1 = \pi \text{ s}^{-2}$  .(figure ci-dessous).Les nombres de dents des engrenages du treuil sont  $Z_1=8, Z_2=32, Z_3=12, Z_4=36$  ,et le diamètre du tambour est  $D = 400 \text{ mm}$  .Déterminer la vitesse et l'accélération du fardeau ainsi que la hauteur à laquelle on le fait monter au bout d'une demi minute après le commencement du mouvement.



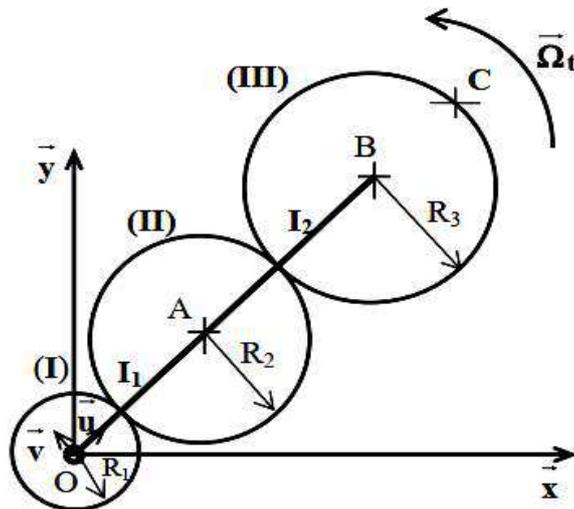
**EX05:** Soit une tige (**T**) homogène de longueur  $R$ , d'extrémités  $O$  et  $A$ . Cette tige est en rotation autour d'un axe fixe  $(O, \vec{Z}_1)$  par un angle de rotation  $\theta$  (voir figure) dans le repère fixe  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Le repère  $R_T(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$  est lié à la tige, tel que  $\vec{OA} = R\vec{u}$

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point  $A$ , en utilisant la méthode de dérivation directe et la méthode de distribution des vitesses.



**EX: 06** Un train d'engrenages est constitué par trois roues dentées **I**, **II**, et **III**, de rayon respectifs  $R_1$ ,  $R_2$ , et  $R_3$ , et dont les centres  $O$ ,  $A$  et  $B$  restent alignés sur le bras  $OB$  tournant autour de  $Oz$  dans le plan  $(Ox, Oy)$  avec un taux de rotation  $\vec{\Omega}_t$  (voir

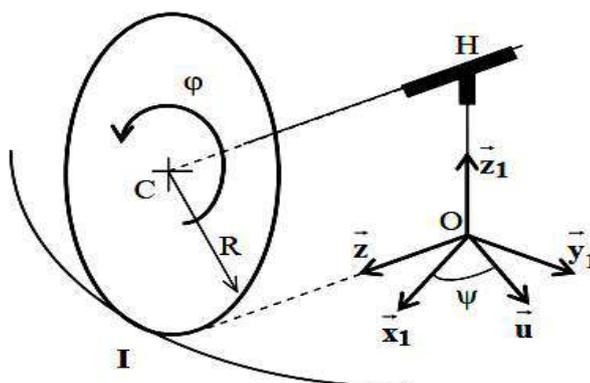
figure). La roue dentée I étant fixe dans le plan  $(ox, oy)$ , on demande de calculer les taux de rotations dans les trois roues. En déduire le vecteur vitesse au point C de la roue III.



**EX: 07**

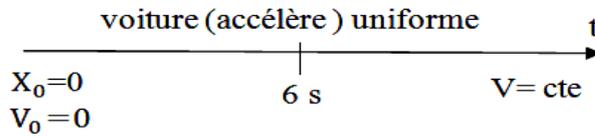
On considère la roue (D), de centre C et de rayon R (voir figure), située dans un plan vertical mobile et est solidaire à la tige CH. L'ensemble (Roue + tige) tourne autour de CH avec un angle de rotation  $\varphi$ . La tige CH elle même est liée à l'axe fixe  $(O, \vec{z}_1)$  par un pivot glissant d'axe  $(H, \vec{z}_1)$  et tourne autour de lui par un angle  $\psi$ . Sachant que la distance CH =  $\rho$  est considérée comme variable, et la roue (D) effectue un roulement sans glissement sur le plan de contact  $R_1(O, x_1, y_1)$ .

Ecrire la condition de roulement sans glissement de la roue avec le plan de contact au point I.



**EX: 01**

\* Pour la voiture



$0 < t < 6\text{ s}$  ,  $x_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$  avec  $v_0 = 0$  et  $x_0 = 0$

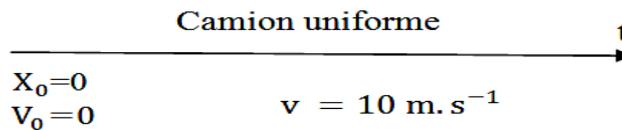
Donc: ,  $x_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} (2) \cdot (6)^2 = 36\text{ m}$

la vitesse :  $v_1 = \gamma t + v_0 = 2 \cdot 6 = 12\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$t > 6\text{ s} \Rightarrow x_2 = v(t - t_0) + x_1$

$x_2 = 12(t - 6) + 36 = x_{\text{voiture}}$

\* Pour le camion



$x_{\text{camion}} = v \cdot t + x_0$

$x_{\text{camion}} = v \cdot t = 10 \cdot t$  .....(1)

pour déterminer le temps il faut que :  $x_{\text{voiture}} = x_{\text{camion}}$  , donc

$12(t - 6) + 36 = 10 \cdot t \Rightarrow t = 18\text{ s}$  .....(2)

Remplaçons (2) dans (1)

$x_{\text{camion}} = v \cdot t = 10 \cdot 18 = 180\text{ m}$  et

$x_2 = 12(t - 6) + 36 = x_{\text{voiture}} = 12(18 - 6) + 36 = 180\text{ m}$

**EX: 02**

Détermination de la vitesse à  $t_1 = ?$

On 'a :  $\gamma_N = \gamma_T$  à  $t_1$  avec  $\gamma_N = \frac{d^2s}{dt^2}$  et  $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$

$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \frac{d}{dt}(t)^3 = \frac{6}{3} t^2 = 2 t^2$

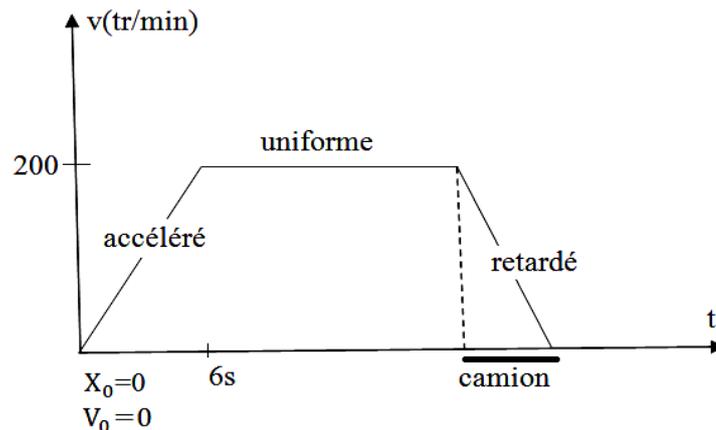
$$\gamma_T = \frac{dv}{dt} = 4t, \quad \gamma_N = \frac{v^2}{r} = \frac{4t^4}{8}, \quad r = 8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \gamma_N = \frac{1}{2}t^4$$

$$\text{Or : } \gamma_N = \gamma_T \Rightarrow 4t = \frac{1}{2}t^4 \Rightarrow t^3 = 8 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow V_1 = 2(t_1)^2 = 2(2)^2 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### **EX:03**



\* Phase I: Mouvement accéléré

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha t^2 + w_0 \cdot t + \theta_0$$

$$w = \alpha \cdot t \Rightarrow \alpha = \frac{w}{t} = \frac{200}{6} = 0.55 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} (0.55) \cdot (6)^2 = 10 \text{ tr}, \quad w_0 = 0, \quad \theta_0 = 0$$

\* Phase 2: Mouvement uniforme

$$\theta_2 = 200 \cdot t_2, \quad \alpha_2 = ?, \quad t_2 = ?$$

\* Phase 3: Mouvement retardé

$$w = \alpha_3 t_3 + w_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_3 \cdot 5 + 200 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-200}{5} = -40 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-2}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \alpha_3 t^2 + w_0 \cdot t + \theta_0, \quad \text{et } \theta_0 = 0$$

$$\text{Donc } \theta_3 = \frac{1}{2} \alpha_3 t^2 + w_0 \cdot t = \frac{1}{2} (-40) \cdot (5)^2 + 200(5) = 500 \text{ tr}$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3100 \Rightarrow \theta_2 = 3100 - (\theta_1 + \theta_3) = 3100 - (10 + 500) = 2590 \text{ tr}$$

$$\theta_2 = \omega \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\theta_2}{\omega} = \frac{2590}{200} = 12.95 \text{ min}$$

\* Le temps total pour la rotation ?

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 6 \text{ s} + (12.95 \times 60) + (5 \times 60) = 1083 \text{ s} = 18 \text{ min}$$

### EX:04

$V=?$ ,  $\gamma=?$ ,  $h=?$  pour  $t=30\text{s}$ ,  $\alpha_1 = \pi \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $V = R \cdot \omega$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = R_1 \cdot \omega_1 \\ V_1 = R_2 \cdot \omega_2 \end{array} \right| \Rightarrow R_1 \cdot \omega_1 = R_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1 \omega_1}{R_2} \dots \dots \dots (1)$$

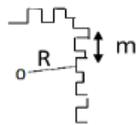
$$\left. \begin{array}{l} V_2 = R_3 \omega_2 \\ V_2 = R_4 \omega_3 \end{array} \right| \Rightarrow R_3 \omega_2 = R_4 \omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{R_3 \omega_2}{R_4} \dots \dots \dots (2)$$

Remplace (1) dans (2)  $\Rightarrow \omega_3 = \frac{R_3 R_1 \omega_1}{R_4 R_2} = \frac{R_3 R_1 \omega_1}{R_4 R_2}$

or  $\omega_1 = \alpha_1 \cdot t \Rightarrow \omega_3 = \frac{R_3 R_1}{R_4 R_2} \cdot \alpha_1 \cdot t \dots \dots \dots (3)$

Z: Nombre de dents

m: longueur d'un dent



O'na  $m \cdot Z_i = \pi \cdot R_i \Rightarrow R_i = \frac{m \cdot Z_i}{\pi} \dots \dots \dots (4)$

Remplace (4) dans (3)

$$\omega_3 = \frac{\frac{mZ_3}{\pi} \cdot \frac{mZ_1}{\pi}}{\frac{mZ_4}{\pi} \cdot \frac{mZ_2}{\pi}} \alpha_1 \cdot t \Rightarrow \omega_3 = \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z_2} \alpha_1 \cdot t = \frac{12 \cdot 8}{36 \cdot 32} \cdot \pi \cdot 30 = 7,85 \text{ s}^{-1}$$

\*  $R_5 = \frac{D}{2}$  et  $V = R_5 \cdot \omega_3 \Rightarrow V = \frac{0,4}{2} \cdot 7,85 = 1,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

et  $\gamma = \frac{V}{t} = \frac{1,57}{30} = 0,052 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Mouvement uniforme accéléré  $h = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t + x_0$

$V_0 = 0$  et  $x_0 = 0$

$h = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} (0,052)^2 \cdot (30)^2 = 1,22 \text{ m}$

### EX:05

Détermination des vecteurs vitesse et accélération du point A :

Nous avons :

L'angle de rotation de la tige autour de l'axe  $\vec{z}_1$ ,  $\theta$

Et le vecteur position du point A :  $\overrightarrow{OA} = R \vec{u}$

### 1- la méthode de dérivation directe :

Le vecteur vitesse du point A par rapport à  $R_1$  est défini par :

$$v_{A/R_1} = \frac{d^{R_1} \overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^{R_1} R \vec{u}}{dt} = R \frac{d^{R_1} \vec{u}}{dt}$$

Sachant que :

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{v} = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

La dérivée du vecteur unitaire mobile  $\vec{u}$  est :

$$\begin{aligned} \frac{d^{R_1} \vec{u}}{dt} &= \frac{d^{R_1} \cos \theta}{dt} \vec{x}_1 + \frac{d^{R_1} \sin \theta}{dt} \vec{y}_1 \\ &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_1 = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1) = \dot{\theta} \vec{v} \end{aligned}$$

Donc, le vecteur vitesse du point A à l'extrémité de la tige s'écrit :

$$v_{A/R_1} = R \dot{\theta} \vec{v}$$

Et le vecteur accélération du point A est:

$$a_{A/R_1} = \frac{d^{R_1} v_{A/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} R \dot{\theta} \vec{v}}{dt} = R \frac{d^{R_1} (\dot{\theta} \vec{v})}{dt}$$

$$a_{A/R_1} = R \left( \vec{v} \frac{d^{R_1} \dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta} \frac{d^{R_1} \vec{v}}{dt} \right)$$

$$\text{Soit : } a_{A/R_1} = (\ddot{\theta} \vec{v} - \dot{\theta}^2 \vec{u})$$

### 2- Méthode de distribution des vitesses dans un corps solide :

Le taux de rotation de la tige autour de l'axe  $\vec{z}_1$  est :

$$\Omega_{T/R_1} = \frac{d\theta}{dt} \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, on écrit dans le point A :

$$a_{A/R_1} = v_{0/R_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \Omega_{T/R_1} = -R \vec{u} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Où,  $v_{0/R_1} = 0$ , ( O point fixe, centre de rotation de la tige).

$$D'ici : v_{A/R_1} = \overrightarrow{AO} \wedge \Omega_{T/R_1} = -R \vec{u} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_1$$

On déduit le torseur cinématique au point A :

$$[v]_A = \begin{pmatrix} \Omega_{T/R_1} \\ v_{A/R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{v} \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération du point A s'écrit :

$$a_{A/R_1} = \frac{d^{R_1} v_{A/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1} v_{0/R_1}}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AO} \wedge \Omega_{T/R_1})}{dt}$$

et, la dérivée d'un vecteur mobile, par rapport au repère fixe, s'écrit :

$$\frac{d^{R_1} \overrightarrow{OA}}{dt} = \Omega_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Donc, on retrouve la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$a_{A/R_1} = a_{0/R_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \frac{d(\Omega_{T/R_1})}{dt} + (\Omega_{T/R_1} \wedge \overrightarrow{AO}) \wedge \Omega_{T/R_1}$$

On remplaçant les vecteurs  $a_{0/R_1}$ ,  $\overrightarrow{AO}$ , et  $\Omega_{T/R_1}$  par ces expressions, on obtient :

$$a_{A/R_1} = 0 - R \vec{u} \wedge \frac{d \dot{\theta} \vec{z}_1}{dt} + (\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge -R \vec{u}) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_1$$

D'où, on retrouve le vecteur accélération du point A comme suit :

$$a_{A/R_1} = R \ddot{\theta} \vec{v} - R \dot{\theta}^2 \vec{u}$$

### **EX:06**

Détermination des taux de rotation des roues **I**, **II** et **III**.

La roue **I** étant fixe, donc le taux de rotation de la roue **I** est nul, où :  $\vec{\Omega}_1 = \vec{0}$

**- Le taux de rotation de la roue II,  $\vec{\Omega}_2$**

Considérons le contact entre la roue **I** et **II**, et puisque ces roues sont dentées, on aura dans le point de contact **I<sub>1</sub>** l'égalité des vitesses (voir figure)

$\vec{v}_I(I_1) = \vec{v}_{II}(I_1)$  Or :  $\vec{v}_I(I_1) = \vec{0}$  , car la roue **I** étant fixe

et,  $\vec{v}_{II}(I_1) = v_{A/0} + \wedge \vec{\Omega}_2$

Puisque la tige est en rotation autour de l'axe Oz, avec le taux de rotation  $\vec{\Omega}_T$  , la vitesse du point A est :

$$v_{A/0} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_T = -(R_1 + R_2) \vec{u} \wedge \Omega_T \vec{z} = (R_1 + R_2) \Omega_T \vec{v}$$

Et

$$\overrightarrow{I_1 A} \wedge \vec{\Omega}_{II} = R_2 \vec{u} \wedge \Omega_2 \vec{z} = R_2 \Omega_2 \vec{v}$$

D'où,

$$\vec{v}_{II}(I_1) = ((R_1 + R_2) \Omega_T - R_2 \Omega_2) \vec{v}$$

Puisque :  $\vec{v}_{II}(I_1) = \vec{0} \Leftrightarrow ((R_1 + R_2) \Omega_T - R_2 \Omega_2) = 0$

Donc, le taux de rotation de la roue **II** est :  $\Omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \Omega_T$

**Le taux de rotation de la roue III,  $\vec{\Omega}_3$  :**

Puisque les roues **II** et **III** sont dentées, on aura dans le point de contact **I<sub>2</sub>** l'égalité des vitesses :

$$\vec{v}_{II}(I_2) = \vec{v}_{III}(I_2)$$

Or,

$$\vec{v}_{II}(I_2) = v_{A/0} + \overline{I_2 A} \wedge \vec{\Omega}_2$$

Avec :

$$v_{A/0} = \overline{AO} \wedge \vec{\Omega}_T = -(R_1 + R_2) \vec{u} \wedge \Omega_T \vec{z} = (R_1 + R_2) \Omega_T \vec{v}$$

Et

$$\overline{I_2 A} \wedge \vec{\Omega}_2 = -R_2 \vec{u} \wedge \Omega_2 \vec{z} = R_2 \Omega_2 \vec{v}$$

D'où

$$\vec{V}_{II}(I_2) = (R_1 + R_2) \Omega_T + R_2 \Omega_2 \vec{v} = 2(R_1 + R_2) \Omega_T \vec{v}$$

D'autre part :

$$\vec{V}_{III}(I_2) = \vec{V}_{B/0} + \overline{I_2 B} \wedge \vec{\Omega}_3$$

Le point B est aligné sur le bras OB tournant avec  $\Omega_T$ , d'où le vecteur vitesse du point B qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B/0} &= \overline{BO} \wedge \Omega_T \vec{z} = -(R_1 + 2R_2 + R_3) \vec{u} \wedge \Omega_T \vec{z} \\ &= (R_1 + 2R_2 + R_3) \Omega_T \vec{v} \end{aligned}$$

Et

$$\overline{I_2 B} \wedge \vec{\Omega}_3 = -R_3 \vec{u} \wedge \Omega_3 \vec{z} = R_3 \Omega_3 \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{V}_{III}(I_2) = (R_1 + 2R_2 + R_3) \Omega_T - R_3 \Omega_3 \vec{v}$$

De la relation  $\vec{V}_{II}(I_2) = \vec{V}_{III}(I_2)$  ci-dessus, on écrit :

$$2(R_1 + R_2) \Omega_T \vec{v} = (R_1 + 2R_2 + R_3) \Omega_T - R_3 \Omega_3 \vec{v}$$

Par conséquent, le taux de rotation de la roue **III** s'obtient :

$$\Omega_3 = \frac{R_3 - R_1}{R_3} \Omega_T$$

- Le vecteur vitesse du point  $C$ ,  $\vec{V}_{C/O}$ , s'écrit :

$$\vec{V}_{C/O} = \vec{V}_{B/O} + \overline{CB} \wedge \Omega_3 \vec{Z}$$

Nous avons :

$$\vec{V}_{B/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3) \Omega_T \vec{v}$$

Et :

$$\overline{CB} \wedge \Omega_3 \vec{Z} = -R_3 \vec{u} \wedge \left( \frac{R_3 - R_1}{R_3} \right) \Omega_T \vec{Z} = (R_3 - R_1) \Omega_T \vec{v}$$

D'où :

$$\vec{V}_{C/O} = (R_1 + 2R_2 + R_3) \Omega_T \vec{v} + (R_3 - R_1) \Omega_T \vec{v}$$

On en déduit :

$$\vec{V}_{C/O} = 2(R_2 + R_3) \Omega_T \vec{v}$$

## Chapitre V: Géométrie des Masses

### V.1. Introduction

Dans le but de pouvoir décrire le mouvement d'un système matériel, il est important de connaître la répartition géométrique de la masse afin de se préparer au concept de cinétique et dynamique des solides indéformables.

Cette répartition géométrique est basée sur deux points principaux, le centre de masse ou d'inertie, et la matrice d'inertie.

### V.2. Masse d'un système Matériel

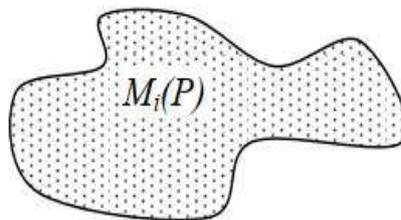
En Mécanique classique, chaque système est associé d'une quantité scalaire appelé *masse*, qui définit la quantité de la matière contenue dans le volume de ce solide

### V.3. Additivité des masses

La masse d'un système matériel (S) est égale à la somme des masses qui le composent. Exemple : masse d'un livre = somme des masses des feuilles qu'il contient. La masse d'un système matériel est définie par la grandeur scalaire suivante:

$$M = \int_{p \in (S)} dm(p), \quad (V-01)$$

L'élément  $dm(p)$  est la mesure de la masse au voisinage du point (P).



**Fig.V.01.** La masse d'un système matériel

Un système matériel est un ensemble discret ou continu des points matériels ou encore une réunion d'ensembles continus ou discrets de points matériels.

**V.3.1. Système discrets :** La masse d'un système discret est la somme de points matériels discrets de masse:  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ . (V-02)

**V.3.2. Système continue:** On dit qu'un système est continu si le nombre de particule contenue dans un élément de volume est suffisamment grand afin de négligé les fluctuations, ce qui permet de remplacer la somme par un continue :

$$m = \int_{\text{solide}} dm(p) \quad (V-03)$$

L'élément  $dm(p)$  est la mesure de la masse au voisinage du point . Selon le type du système (S), la forme d'intégrale change :

**V.3.3. Système (S) est un volume:** La masse totale est en fonction de la densité volumique  $\rho(P)$  au point P :  $m = \int_V \rho(p)dV$ , (V-04)

**V.3.4. Système (S) est une surface :** ( cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions et a masse s'écrirait :

$$m = \int_s \sigma(p) ds , \quad (V-05)$$

**V.3.5. Système (S) est linéaire :** (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige, et la masse s'écrirait :

$$m = \int_L \lambda(p) dl , \quad (V-06)$$

Où  $dl$  est un élément de longueur et  $\lambda(P)$  est la densité linéique au point P et  $\lambda$  un élément de longueur du solide (S).

**Remarque:** Si le système est homogène, les densités  $\lambda(p)$ ,  $\sigma(p)$  et  $\rho(P)$  seront constantes.

#### **V.4. Centre d'inertie d'un solide**

**V.4.1. Définition :** On appel centre d'inertie où de masse d'un système (S) le barycentre (G) des différents point (p) du solide (S) affecter de leur masse respectivement :

$$\int_{p \in (S)} \overrightarrow{GP} dm(p) = 0, \quad (V-07)$$

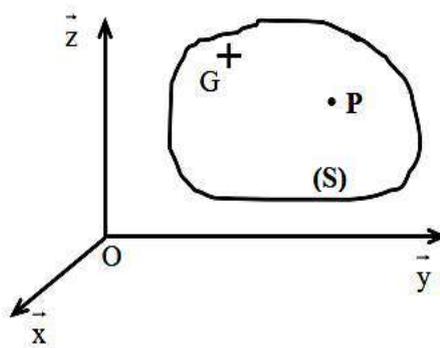
Si O étant un point arbitraire de l'espace.

$$\overrightarrow{OG} = \int \frac{1}{dm} \int \overrightarrow{Op} dm = \frac{1}{m} \int \overrightarrow{OP} dm \quad (V-08)$$

$$D'o\grave{u} : \quad \int \overrightarrow{Gp} dl = \int (Go + OP) dm = 0 \quad (V-09)$$

Si nous rapportons l'espace \u00e0 un rep\u00e8re orthonorm\u00e9  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  d'origine  $O$  (Figure V-02), nous pouvons \u00e9crire :

$$\overrightarrow{OG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y} + Z_G \vec{z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z} \quad (V-10)$$



**Fig.V.02.**Centre d'inertie d'un solide

Les coordonn\u00e9es du centre d'inertie d'un syst\u00e8me mat\u00e9riel  $G$  sont donc exprim\u00e9es par

$$X_G = \frac{1}{m} \int_{p \in (S)} x dm \quad (V-10) \quad Y_G = \frac{1}{m} \int_{p \in (S)} y dm \quad Z_G = \frac{1}{m} \int_{p \in (S)} z dm \quad (V-11)$$

#### V.4.2. Cas d'un système complexe

Très souvent un système est composé d'un ensemble de systèmes élémentaires pour lesquels les calculs sont aisés, chacun de ces systèmes a un centre d'inertie  $G_i$  et une masse  $m_i$ . D'après le théorème de l'intégration, le centre d'inertie du système complexe s'obtient par:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n \int_{p \in S_i} \overrightarrow{OP} dm \quad (V-12)$$

Or : (V-13)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_i} \int_{p \in S_i} \overrightarrow{OP} dm$$

Donc: 
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OG}_i \quad (V-14)$$

Le point  $G$  est donc le barycentre des points  $G_i$  affectés des coefficients  $m_i$ . On procède en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie  $G_i$  de chacun des sous-ensembles de masse  $m_i$ .
- On détermine le centre d'inertie  $G$  comme barycentre des points  $G_i$  affectés des coefficients  $m_i$ .

#### Remarque :

Il ne faut pas confondre le centre d'inertie avec le centre de gravité. Le centre de gravité  $C$  est, par définition, le point d'application du poids du solide.

Le centre de gravité  $C$  coïncide avec le centre d'inertie  $G$  si et seulement si le champ de pesanteur est uniforme.

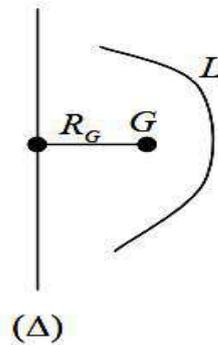
#### V.5. Théorème de Guldin

Il existe deux théorèmes de Guldin pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin.

Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

### V.5.1. premier Théorème de Guldin

La surface  $S$  engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur  $L$  autour d'un axe  $(\Delta)$  sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur  $L$  de l'arc par la longueur de la circonférence  $2\pi R_G$  décrite par le centre d'inertie  $G$  de l'arc de courbe.



**Fig.V.03.** premier Théorème de Guldin

Soit  $L$  la longueur de l'arc et  $R_G$  sont centre d'inertie. La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :  $\pi 2R_G$  , alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S/\Delta = 2\pi R_G L \quad \text{d'où} \quad R_G = \frac{S/\Delta}{2\pi L} \quad (\text{V-15})$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura :

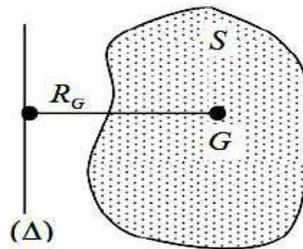
$$R_G = \frac{S_{\text{totale}} / \Delta}{2\pi L_{\text{totale}}} \quad (\text{V-16})$$

- si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{Y})$  nous aurons :  $X_G = \frac{S/OY}{2\pi L}$  (V-17)

- si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{X})$  nous aurons :  $Y_G = \frac{S/OX}{2\pi L}$  (V-18)

### V.5. 2. deuxième Théorème de Guldin

Une surface plane homogène  $S$ , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe sans le rencontrer  $(\Delta)$  engendre un volume  $V$ . Le volume  $V$  engendré est égal au produit de la surface  $S$  par la longueur du périmètre  $2\pi R_G$  décrit par le centre d'inertie  $G$  de cette surface autour de l'axe  $(\Delta)$ . Soit  $S$  la surface et  $R_G$  la distance de son centre d'inertie à  $(\Delta)$ .



**Fig.V.04.** Deuxième Théorème de Guldin

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :  $2\pi R_G$ , alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2\pi R_G S, \quad \text{d'où } R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2\pi S} \quad (\text{V-19})$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :

$$R_G = \frac{V_{\text{totale } /\Delta}}{2\pi S_{\text{totale}}} \quad (\text{V-20})$$

- si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{Y})$  nous aurons :

$$X_G = \frac{V_{\text{totale } /OY}}{2\pi S_{\text{totale}}} \quad (\text{V-21})$$

- si l'axe  $(\Delta)$  représente l'axe  $(O, \vec{X})$  nous aurons :

$$X_G = \frac{V_{\text{totale } /OX}}{2\pi S_{\text{totale}}} \quad (\text{V-22})$$

## V.6. Tenseur D'inertie

### V.6.1. Définition

On appelle moment d'inertie d'un système discret homogène par rapport à un axe ( $\Delta$ ), la quantité : 
$$\mathbf{I}_\Delta = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i r_i^2 \quad (\text{V-23})$$

Où  $r_i$  est la distance du point  $\mathbf{P}_i$  représentant l'élément matériel de masse  $m_i$  à l'axe  $\Delta$ .

Pour un système continu, on a : 
$$I_\Delta = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (\text{V-24})$$

On peut aussi écrire  $\mathbf{I}_\Delta = \mathbf{mR}^2 \quad (\text{V-26})$

où  $m$  est la masse totale du système et  $R$  le rayon de giration.

### V.6.2. Matrice d'inertie

Pour un solide (S) donné, un point O appartenant à (S) et un repère orthonormé  $\mathbf{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on appelle tenseur d'inertie de (S), en O, relativement au repère

considéré, noté  $I_0$ , la matrice symétrique. 
$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{V-27})$$

Où :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm \quad : \text{Moment d'inertie par rapport à l'axe des } ox \quad (\text{V-28})$$

$$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm \quad : \text{Moment d'inertie par rapport à l'axe des } oy \quad (\text{V-29})$$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm \quad : \text{Moment d'inertie par rapport à l'axe des } oz \quad (\text{V-30})$$

$$I_{xy} = \int_S (xy) dm \quad : \text{Produit d'inertie par rapport aux axes } (xoy) \quad (\text{V-31})$$

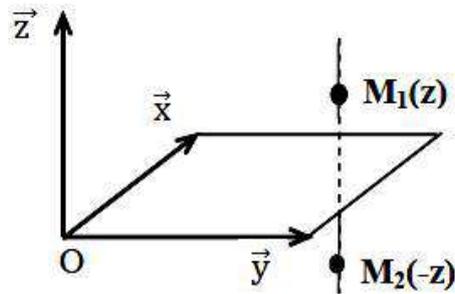
$$I_{xz} = \int_S (x.z) dm \quad : \text{Produit d'inertie par rapport aux axes } (xoy) \quad (\text{V-32})$$

$$I_{yz} = \int_S (y.z) dm \quad : \text{Produit d'inertie par rapport aux axes } (xoz) \quad (\text{V-33})$$

### V.6.3. Cas particuliers

#### V.6.3.a. Système présente certains plans de symétrie

- Si (Oxy) est un plan de symétrie : à tout point  $M_1$  de côté  $z$ , on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-z$  (Figure V.05):

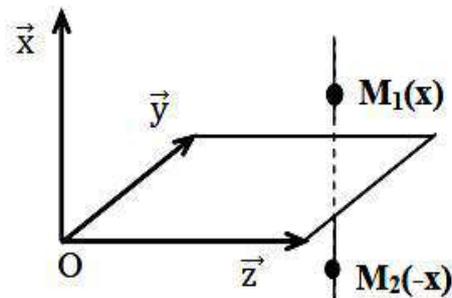


**Fig.V.05.** plan de symétrie (xoy)

$$I_{zx} = \int_{p \in (s)} (z \cdot x) dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{yx} = \int_{p \in (s)} (y \cdot x) dm = 0, \quad \text{car} \quad Z_G = 0 \quad (\text{V-34})$$

- Si (Oyz) est plan de symétrie : à tout point  $M_1$  de côté  $x$ , on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-x$  (Figure V.06) :

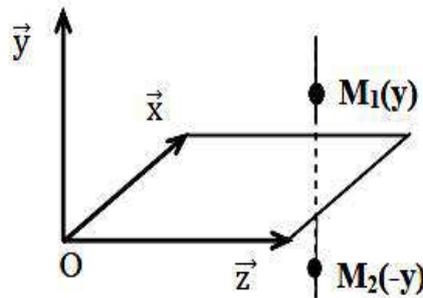
$$I_{yx} = \int_{p \in (s)} (y \cdot x) dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{zx} = \int_{p \in (s)} (z \cdot x) dm = 0, \quad \text{car} \quad X_G = 0 \quad (\text{V-35})$$



**Fig.V.06.** plan de symétrie (yoz)

- De même, Si (Oxz) est plan de symétrie : à tout point  $M_1$  de côté  $y$ , on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-y$  (Figure V.07):

$$I_{yz} = \int_{p \in (s)} (y.z) dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{xy} = \int_{p \in (s)} (x.y) dm = 0 \quad \text{car } Y_G = 0 \quad (\text{V-36})$$



**Fig.V.07.** plan de symétrie (xoz)

#### ***V.6.3.b. Système est un corps de révolution autour de l'axe Oz***

Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie ; en particulier les plans (Oxz) et (Oyz), donc :  $I_{xx} = I_{zz} = I_{yz} = 0$  (V-37)

$I_{xx} = I_{yy}$  (Ox et Oy ont le même rôle)

#### ***V.6.4. Axes principaux d'inertie***

La matrice d'inertie  $I_0$  est diagonalisable il existe une base orthonormée  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  dans laquelle elle est diagonale :

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{0x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0z_1} \end{bmatrix} \quad (\text{V-38})$$

Les termes de la diagonale sont les moments d'inertie principaux ou moments d'inertie autour des axes principaux Ox, Oy, Oz. Corrélativement, les produits d'inertie sont nuls.

Pour un solide quelconque, la recherche de ses axes principaux conduit à une équation du troisième degré (équation aux valeurs propres de la matrice d'inertie).

### V.6.5. Théorème de Huygens

Connaissant le moment d'inertie par rapport à un axe ( $\Delta$ ) passant par le centre d'inertie  $O$ , le théorème de Huygens permet de calculer le moment d'inertie par rapport à tout axe  $A\vec{u}$  parallèle à  $\vec{O}\vec{u}$ .

Considérons le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  représenté sur la (Figure V.08)

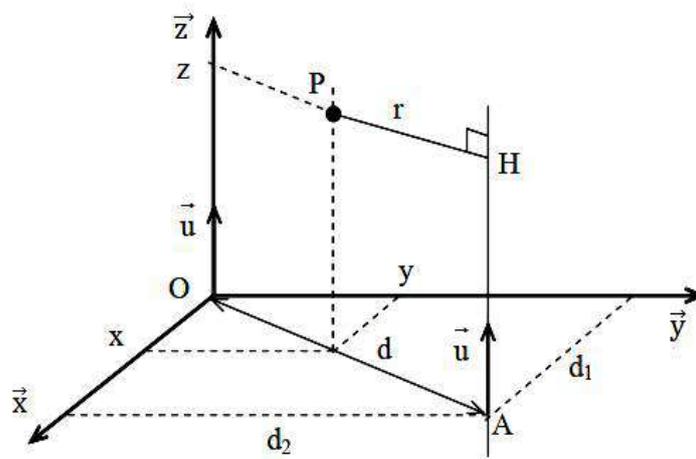


Fig.V.08. Théorème de Huygens

Soit :  $\vec{OP} = (x, y, z)$  ,  $\vec{OH} = (d_1, d_2, z)$

On a alors :  $\vec{HP} = (x - d_1, y - d_2, 0)$

D'où 
$$I_{Au} = \int_V [(x - d_1)^2 + (y - d_2)^2] dm = 0$$

$$I_{Au} = \int_V (x^2 + y^2) dm + \int_V (d_1 + d_2)^2 dm - \int_V (x d_1 + y d_2) dm = 0$$

$$I_{Au} = I_{Ou} + m d^2 - 2 d_1 \int_V x dm - 2 d_2 \int_V y dm \quad (V-39)$$

Où  $d$  est la distance entre  $A\vec{u}$  et  $O\vec{u}$  Or par définition,

$$\int_v x dm = \int_v y dm = 0, \quad (V-40)$$

car  $O$  est le centre d'inertie.

### V.6.5.1. Enoncé du théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $A\vec{u}$  est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle à  $O\vec{u}$  passant par le centre de masse du solide augmenté du produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à  $Ox$ .

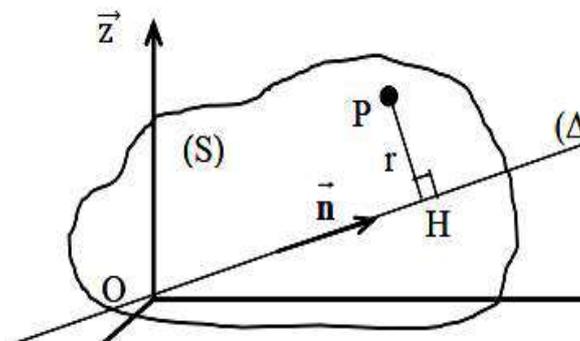
### V.6.6. Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque ( $\Delta$ )

Le moment d'inertie par rapport à une droite est défini par :  $I_\Delta = \int_{p \in (S)} r^2 dm$

Où  $r$  représente la distance de l'élément matériel  $P$  à la droite ( $\Delta$ ) ;

Si le tenseur d'inertie en  $O$  étant  $I_0$ , le moment d'inertie par rapport à la droite  $\Delta$  (Figure 2.11), passant par  $O$  et de direction  $\vec{n}$  est :  $I_\Delta = \vec{n}^t I_0 \vec{n}$  (V-41)

Où  $\vec{n}^t$  est le transposé du vecteur directeur unitaire de la droite ( $\Delta$ ) ,  
Donc le moment d'inertie du système ( $S$ ) par rapport à la droite ( $\Delta$ ,  $\vec{n}^t$ ) est le produit doublement contracté du tenseur d'inertie  $I_0$  par le vecteur unitaire  $\vec{n}$ .



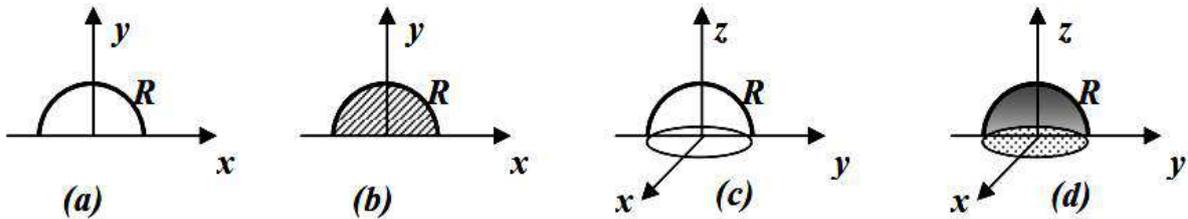
**Fig.V.09.** Moment d'inertie par rapport à une droite quelconque ( $\Delta$ )

## EXERCICES RESOLUS

### EX:01

Déterminer le centre d'inertie des corps solides homogènes suivants :

- a) Un demi-cercle matériel de rayon **R**
- b) Un demi disque matériel de rayon **R**
- c) Une demi sphère matérielle creuse de rayon **R**
- d) Une demi sphère matérielle pleine de rayon **R**



### EX:02

Déterminer le centre d'inertie de la surface triangulaire homogène suivante.

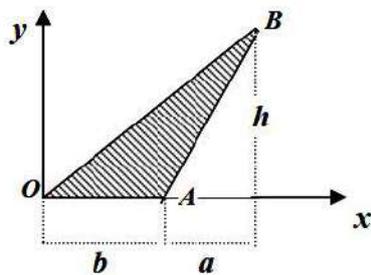


Figure 01

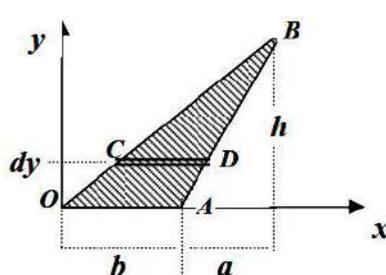


Figure 02

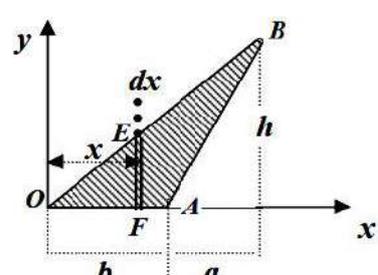
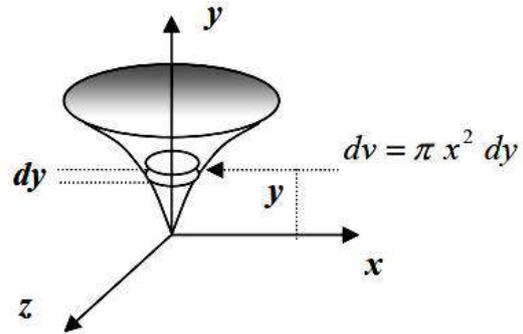
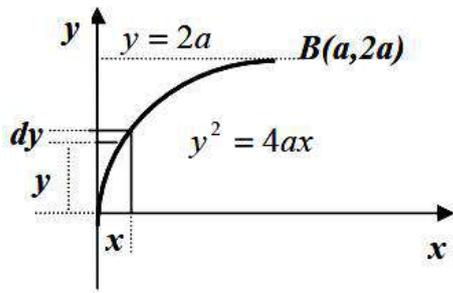


Figure 03

### EX:03

En faisant tourner la surface limitée par l'axe **oy**, la courbe parabolique d'équation  $y^2 = 4ax$  et la droite d'équation  $y = 2a$ , nous obtenons un volume, comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer le centre d'inertie de ce volume.



#### EX:04

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie, par le théorème de Guldin, des solides homogènes suivants :

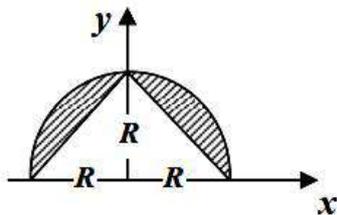


Figure 01

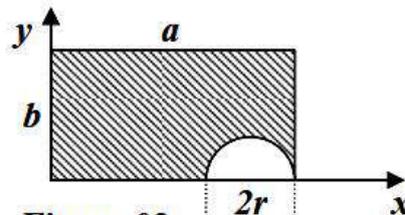


Figure 02

#### EX:05

Déterminer les tenseurs d'inertie en  $O$  relativement au repère orthonormé  $R(O, x, y, z)$  des solides homogènes  $(S)$  suivants :

1.  $(S)$  est une barre  $AB$  de longueur  $L$ , de milieu  $O$ , portée par l'axe  $Oy$
2.  $(S)$  est un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$
3.  $(S)$  est un disque de centre  $O$ , de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$
4.  $(S)$  est une sphère creuse de centre  $O$ , de rayon  $R$
5.  $(S)$  est une sphère pleine de centre  $O$ , de rayon  $R$
6.  $(S)$  est une plaque rectangulaire de dimension  $a \times b$  de centre de gravité  $O$ , l'axe  $Oz$  est perpendiculaire à la plaque
7.  $(S)$  est un parallélépipède plein de dimension  $2a \times 2b \times 2c$  et le centre du repère est en  $O$  milieu du côté  $2a$

### **EX:01**

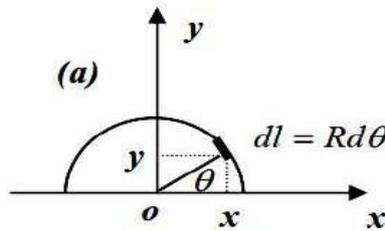
**a)** L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc :  $x_G = 0$ , le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a :  $y_G = \frac{1}{m} \int y dm$

Le solide est linéaire ayant la forme d'un demi cercle, sa masse est donnée par :

$$m = \int_s \lambda dl$$

où :  $\lambda$  est la densité linéaire et  $dl$  un élément de longueur.

L'élément de longueur  $dl$  a pour coordonnées :  $dl \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{cases}$  avec  $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par :  $m = \int_s \lambda dl = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda \pi R$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int y \lambda dl = \frac{1}{\lambda \pi R} \int_0^\pi R \sin \theta \sin \theta d\theta = \frac{R}{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi}$$

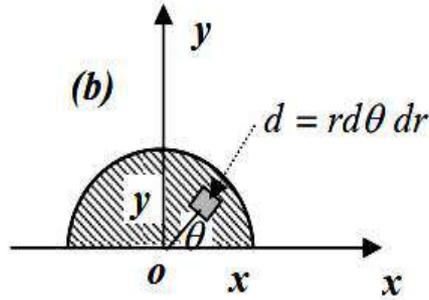
$$\text{d'où : } G = \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

**b)** L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc :  $x_G = 0$ , le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a :  $y_G = \frac{1}{m} \int y dm$ .

Le solide est un demi disque, sa masse est donnée par :  $m = \int_s \sigma ds$

où  $\sigma$  est la densité surfacique et  $ds$  un élément de surface. L'élément de surface  $ds$  a

pour coordonnées :  $ds \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{cases}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par :  $m = \int_{(s)} \lambda ds = \lambda r d\theta dr = \lambda \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int y \sigma ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^\pi r \sin \theta r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta r d\theta$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

c) Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie donc :  $x_G = y_G = 0$ ,

le centre de masse du solide est situé sur l'axe de

symétrie. On a :  $z_G = \frac{1}{m} \int y dm$

Le solide est une demi sphère creuse, sa masse

est donnée par :  $m = \int_s \sigma ds$

où :  $\sigma$  est la densité surfacique et  $ds$  un élément

de surface. L'élément de surface  $ds$  est donné par :  $ds = R d\theta R \psi \cos \theta$ , et a pour

coordonnées :  $ds \begin{cases} R \cos \theta \cos \psi \\ R \cos \theta \sin \psi \\ R \sin \theta \end{cases}$

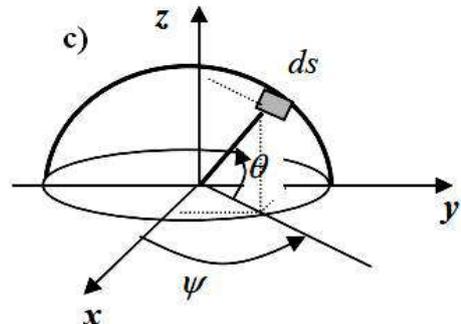
avec :  $R$  constant ;  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$

La masse du solide est donnée par :  $m = \int_s \sigma ds = R \sigma^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma 2\pi R^2$

$$z_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int z \sigma ds =$$

$$\frac{\sigma R^3}{\sigma 2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \int_0^{2\pi} d\psi =$$

$$\left[ \frac{R}{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{R}{2}$$



$$\text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = R/2 \end{cases}$$

**d)** Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie donc :  $x_G = y_G = 0$ , le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie (Oz).

$$\text{On a alors : } z_G = \frac{1}{m} \int y dm$$

Le solide est une demi sphère pleine, sa masse est donnée par :  $m = \int_V \rho dV$

où :  $\rho$  est la densité volumique et  $dv$  un élément de volume.

L'élément de volume  $dv$  est donné par :  $dv = r d\theta r d\psi dr \cos\theta$  et a pour coordonnées :

$$dv \begin{cases} r \cos \theta \cos \psi \\ r \cos \theta \sin \psi \\ r \sin \theta \end{cases}, \text{ avec: } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Psi \leq 2\pi$$

La masse du solide est donnée par :

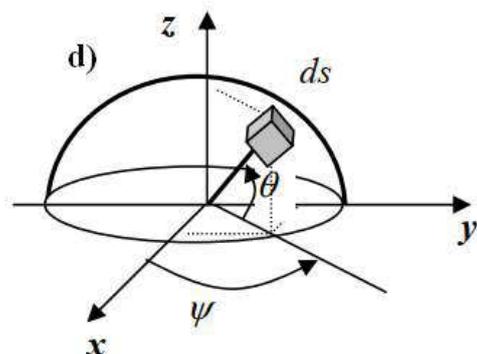
$$m = \int \rho dv = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$$

on déduit :

$$Z_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int z \rho dv = \frac{\rho}{m} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi =$$

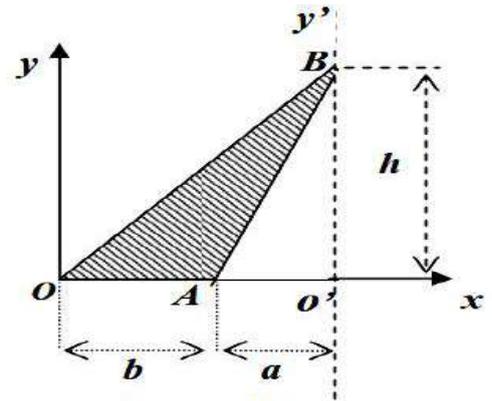
$$\frac{\rho}{\frac{\rho 2\pi R^3}{3}} \frac{R^4}{4} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{3R}{8}$$

$$\text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = 3R/8 \end{cases}$$



**EX:02**

1) On utilisant le théorème de Guldin. Faisons une translation de  $a + b$  suivant l'axe des  $x$  vers  $O'y'$  : On fait tourner le solide autour de l'axe  $O'y'$  on obtient un cône creux donné par le triangle  $OO'B$  et le triangle  $AO'B$



**Figure 01**

$$x'_G = \frac{V_{\text{tot}/O'y'}}{2\pi S_{\text{tot}}(OAB)} = \frac{\frac{1}{3} \pi (a+b)^2 h - \frac{1}{3} \pi a^2 h}{2\pi \frac{bh}{2}} = \frac{(b+a)^2 - a^2}{3b}$$

Dans le repère  $oxy$  :  $x_G = (a+b) - \frac{(b+a)^2 - a^2}{3b} = \frac{2b+a}{3}$

$$y_G = \frac{V_{\text{tot}/Oy}}{2\pi S_{\text{tot}}(OAB)} = \frac{\frac{1}{3} \pi h^2 (a+b) - \frac{1}{3} \pi h^2 a}{2\pi \frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

2) Masse du solide plan :  $m = \sigma \cdot s = \sigma \cdot \frac{1}{2} b \cdot h$

Calculons  $y_G = \frac{1}{m} \int_{(s)} y dm = \frac{1}{m} \int_{(s)} y \sigma ds$

L'élément de surface est donné par :  $ds = L_1 dy$

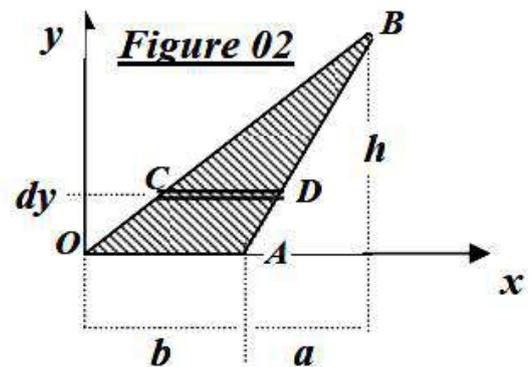
, avec  $L_1 = CD$ ,  $L_2 = EF$ ,  $ds = CD dy$ ,

$dm = \sigma ds$

Dans les triangles semblables OAB et CBD, nous avons :  $\frac{CD}{OA} = \frac{h-y}{h} \Leftrightarrow \frac{L_1}{b} = \frac{h-y}{h}$

$L_1 = b \left(\frac{h-y}{h}\right)$  ce qui donne :  $ds = b \left(\frac{h-y}{h}\right) dy$ , avec  $0 \leq y \leq h$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{(s)} y \sigma ds = \frac{2}{bh} \int_{(s)} y \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{2}{h^2} \left( \frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}$$



**Figure 02**

$$y_G = \frac{h}{3}$$

3) Calculons :  $x_G = \frac{1}{m} x = \frac{1}{m} \int_{(s)} x \rho ds$

L'élément de surface est donné par :

$$ds = L_2 dx, \text{ avec}$$

$$L_2 = EF, OF = x, \text{ avec } 0 \leq x \leq a + b$$

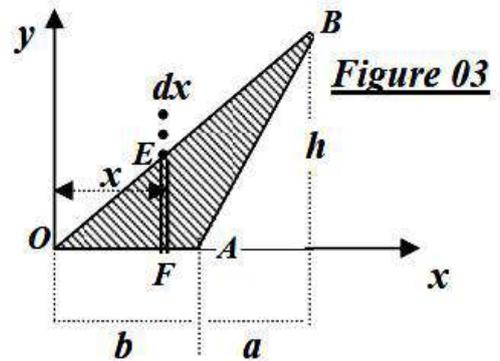
Dans les triangles semblables OEF et OBC ,

$$\text{nous avons : } \frac{EF}{OF} = \frac{BC}{OC} \Leftrightarrow \frac{L_2}{x} = \frac{h}{a+b}$$

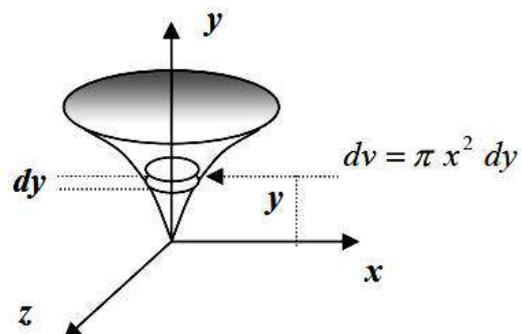
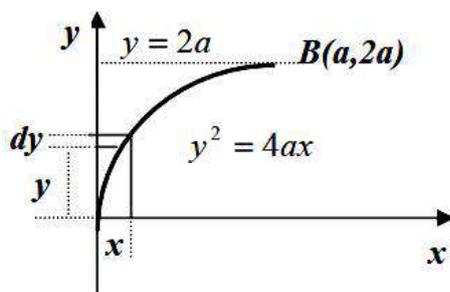
$$L_2 = x \frac{h}{a+b} \text{ ce qui donne : } ds = b \left( \frac{h}{a+b} \right) x dx$$

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{(s)} x \rho ds = \frac{2}{bh} \int_0^{a+b} x \frac{h}{a+b} x dx = \frac{2}{b(a+b)} \int_0^{a+b} x^2 dx = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^2}{b}$$

$$x_G = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^2}{b}$$



### EX:03



Nous avons:  $y^2 = 4xa \Rightarrow x = \frac{y^2}{4a}$  pour  $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 2a \end{cases}$

La rotation de cette surface par rapport à l'axe des  $y$  donne un solide de révolution d'axe  $y$ . Par raison de symétrie, le centre de masse sera sur l'axe  $Oy$ , alors :

$$x_G = 0$$

et

$$y_G = 0$$

A une hauteur  $y$ , on choisit un élément de volume (couronne)  $dv$  ayant une surface

circulaire ayant une surface circulaire égale à  $\pi x^2$  et d'épaisseur  $dy$  tel que :  
 $dv = \pi x^2 dy$  avec  $0 \leq y \leq 2a$

Le volume total décrit par la rotation de cette surface est égal à :

$$V = \int_0^{2a} \pi x^2 dy = \int_0^{2a} \pi \left( \frac{y^2}{16a^2} \right) dy = \frac{\pi}{16a^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{2}{5} \pi a^3$$

La coordonnée du centre de masse du volume suivant l'axe  $Oy$  est donnée par :

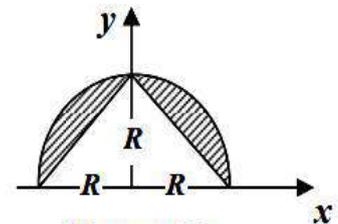
$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{\rho V} \int y \rho dV = \frac{1}{V} \int_0^{2a} y \pi x^2 dy = \frac{1}{V} \int_0^{2a} y \pi \left( \frac{y^2}{4a} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{16a^2 V} \int_0^{2a} y^5 dy = \frac{\pi}{16a^2 \frac{2}{5} \pi a^3} \left[ \frac{y^6}{6} \right]_0^{2a} = \frac{5a}{3} \end{aligned}$$

#### **EX:04**

##### **a) figure 01 :**

Le solide est constitué d'un demi disque évidé d'un triangle isocèle dont la base est le diamètre du disque et la hauteur le rayon du disque.

Par raison de symétrie le solide a son centre d'inertie sur l'axe des  $y$ , d'où :  $x_G = 0$

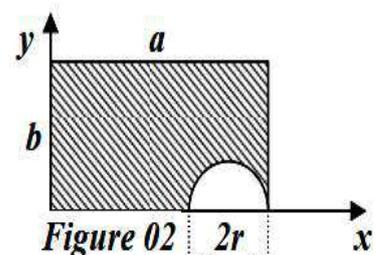


**Figure 01**

$$y_G = \frac{V_{tot/x}}{2\pi S_{tot}} = \frac{\text{vol (sphere)} - \text{vol}(2\text{cônes})}{2\pi(S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - 2\frac{1}{3}\pi R^3}{2\pi\left(\frac{\pi R^2}{2} - R^2\right)} = \frac{2}{3} \frac{R}{\pi - 2}$$

##### **b) figure 02 :**

Le solide est constitué d'une plaque rectangulaire évidée d'un demi disque.



**Figure 02**

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{V_{tot/y}}{2\pi S_{tot}} = \frac{\text{vol (cylindre)} - \text{vol}(demi - \text{torre})}{2\pi(S_{disque} - S_{triangle})} \\ &= \frac{\pi a^2 b - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\left(ab - \frac{\pi r^2}{2}\right)} = \frac{3a^2 b - 4r^3}{3(2ab - \pi r^2)} \end{aligned}$$

$$y_G = \frac{V_{\text{tot}/x}}{2\pi S_{\text{tot}}} = \frac{\text{vol}(\text{cylindre}) - \text{vol}(\text{demi-toré})}{2\pi(S_{\text{disque}} - S_{\text{triangle}})} = \frac{nb^2a - 2\pi r^2 2\pi(a-r)}{2\pi\left(\frac{ab}{2} - \frac{\pi r^2}{2}\right)}$$

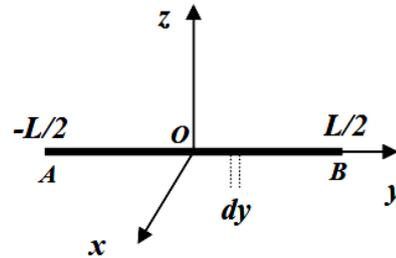
$$= \frac{a^2b - \pi r^2(a-r)}{2ab - \pi r^2}$$

### EX:05

1. Le solide est une barre de longueur L

Nous avons un solide linéaire AB = L de masse m et de densité linéaire  $\lambda$  tel que :

$$m = \int dm = \int \lambda dy = \lambda L \Rightarrow \lambda = \frac{m}{L}$$



On choisit un élément de longueur dy ayant pour coordonnées : (0, y, 0) tel que

$$-L \leq y \leq +L$$

Les moments d'inertie sont données par :

$$I_{xx} = \int_s (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int_s (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int_s (x^2 + y^2) dm$$

Les produits d'inertie sont données par :

$$I_{xy} = \int_s (xy) dm, \quad I_{xz} = \int_s (xz) dm, \quad I_{yz} = \int_s (yz) dm$$

On remarque que les axes Ox et Oz jouent le même rôle vis à vis du solide, alors :

$$I_{xx} = I_{zz}$$

L'élément de longueur choisi pour coordonnées  $x = 0$  et  $z = 0$  alors  $I_{yy}$  et tous les produits d'inertie sont nuls :  $I_{yx} = I_{yz} = I_{xz} = 0$

$$I_{xx} = \int_s (y^2) dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = \lambda \frac{y^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

Le tenseur d'inertie de la barre au point  $O$  est :  $I_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$

2. Le solide est un cercle de rayon  $R$  de centre  $O$  et d'axe  $Oz$

Le périmètre du cercle est égal à :  $L = 2\pi R$

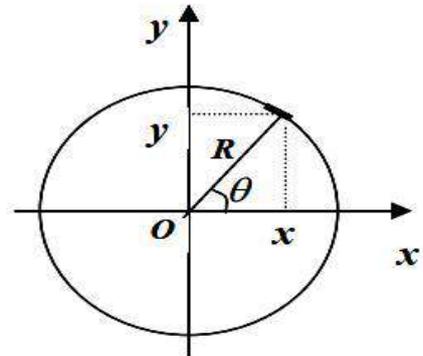
La masse du solide est donnée par :

$$m = \lambda L = \lambda 2\pi R$$

Les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$  sont des plans de symétrie

alors tous les produits d'inertie sont nuls :

$$I_{yx} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$



On voit aussi que les axes  $Ox$  et  $Oy$  jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux :  $I_{xx} = I_{yy}$

Nous avons un solide dans le plan  $(xOy)$ , alors quel que soit l'élément de masse  $dm$  choisi il aura pour coordonnées :  $(x, y, 0)$ , et nous avons aussi dans le cercle :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$I_{zz} = \int_s (x^2 + y^2) dm = \int_s R^2 dm = mR^2$$

$$I_{xx} = \int_s (y^2) dm \quad , \quad I_{yy} = \int_s (x^2) dm$$

En faisant la somme des deux moments d'inertie nous obtenons :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_s (x^2 + y^2) dm = I_{zz}$$

or nous avons l'égalité :  $I_{xx} = I_{yy}$  alors :  $2I_{xx} = I_{zz}$  alors  $I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{2}$

Dans un solide plan, le moment d'inertie suivant l'axe perpendiculaire au plan est égale à la somme des moments suivant les deux axes du plan.

Le tenseur d'inertie d'un cercle en **O** est : 
$$I_0 (s) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}$$

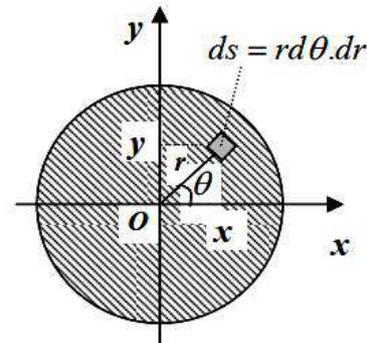
3. Le solide est cercle de rayon R de centre O et d'axe Oz

La surface du disque est :  $S = \pi R^2$

La masse du solide est donnée par :  $m = \sigma R = \sigma \pi R^2$

tous les produits d'inertie sont nuls :

$$I_{yx} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$



On voit aussi que les axes Ox et Oy jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux :  $I_{xx} = I_{yy}$

Nous avons un solide dans le plan (xOy), on choisi un élément de masse

$$dm = \sigma ds = \sigma r d\theta dr \text{ tel que : } 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Les coordonnées de cet élément sont : 
$$dm \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

et nous avons aussi :  $x^2 + y^2 = R^2$

$$I_{zz} = \int_s (x^2 + y^2) dm = \int_s r^2 \sigma r d\theta dr = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma \frac{R^4}{4} 2\pi = \sigma \pi R^2 \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2}$$

$$I_{xx} = \int_s (y^2) dm \quad , \quad I_{yy} = \int_s (x^2) dm$$

En faisant la somme des deux moments d'inertie nous obtenons :

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_s (x^2 + y^2) dm = I_{zz}$$

or nous avons l'égalité :  $I_{xx} = I_{yy}$  alors :  $2I_{xx} = I_{zz}$  alors  $I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} = \frac{mR^2}{4}$

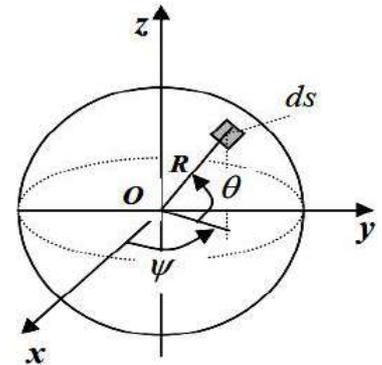
Dans un solide plan, le moment d'inertie suivant l'axe perpendiculaire au plan est égale à la somme des moments suivant les deux axes du plan.

Le tenseur d'inertie d'un disque en  $\mathbf{O}$  est:  $I_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$

4. Le solide est une sphère creuse de rayon  $R$  de centre  $\mathbf{O}$ .

L'élément de surface  $ds$  est repéré par les coordonnées

sphériques :  $(R, \theta, \psi)$  tel que :  $ds \begin{cases} x = r \cos\theta \cos \Psi \\ y = r \cos\theta \sin \Psi \\ z = r \sin\theta \end{cases}$



Avec :  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , et  $0 \leq \psi \leq 2\pi$

Nous avons alors :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

La surface de l'élément choisi est donnée par

$$ds = R d\theta R d\psi \cos \theta = R^2 \cos\theta d\theta d\psi$$

Masse de la sphère creuse :  $m = \int \sigma ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma 4\pi R^2$

Les plans  $(xOy)$ ,  $(xOz)$  et  $(yOz)$  sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls :  $I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ . On voit aussi que les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux :  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ , nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_s (x^2 + z^2) dm + \int_s (x^2 + z^2) dm + \int_s (x^2 + y^2) dm$$

$$3I_{xx} = \int_s (x^2 + z^2 + z^2) dm = 2 \int_s R^2 dm = 2R^2 m$$

d'où :  $I_{xx} = \frac{2}{3} mR^2$

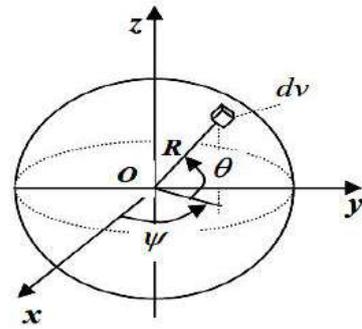
Le tenseur d'inertie en  $\mathbf{O}$  d'une sphère creuse est :  $I_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} mR^2 \end{bmatrix}$

5. Le solide est une sphère pleine de rayon  $R$  de centre  $O$ .

L'élément de volume  $dV$  est repéré par les coordonnées

$$\text{sphériques : } (r, \theta, \psi) \text{ tel que : } dV \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \psi \\ y = r \cos \theta \sin \psi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Avec : } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq r \leq R$$



$$\text{Nous avons alors : } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Le volume de l'élément choisi est donnée par :

$$dV = r \, d\theta \, r \, d\psi \, dr \cos \theta = r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\psi \, dr$$

Masse de la sphère pleine:

$$m = \int \rho \, dV = \int \rho \, r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\psi \, dr = \rho \int_0^R r^2 \, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Les plans  $(xOy)$ ,  $(xOz)$  et  $(yOz)$  sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls :  $I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ . On voit aussi que les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux :  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ , nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_s (x^2 + z^2) \, dm + \int_s (x^2 + z^2) \, dm + \int_s (x^2 + y^2) \, dm$$

$$3I_{xx} = \int_s (x^2 + z^2 + z^2) \, dm = 2 \int_s r^2 \, dm = 2\rho \int_0^R r^4 \, dr \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = 2\rho \frac{R^5}{5} 4\pi$$

$$\text{d'où : } 3I_{xx} = \frac{2R^2}{5} \rho 4\pi R^4 \Rightarrow I_{xx} = \frac{2R^2}{5} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{5} mR^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$$

$$\text{Le tenseur d'inertie en } O \text{ d'une sphère pleine est: } I_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} mR^2 \end{bmatrix}$$

## Chapitre VI : Dynamique du solide rigide

### VI.1. Introduction

La dynamique est l'étude du mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur ces corps. L'objectif de ce chapitre est l'étude des théorèmes généraux régissant la dynamique.

### VI.2. Rappel sur le torseur des forces extérieures

Une force est une action capable de produire ou de modifier un mouvement ou de créer une déformation. Ces forces sont de types :

- gravitationnelle
- électromagnétique
- de contact....etc

Les efforts appliqués sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$[F]_O = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_O \end{pmatrix} \quad (\text{VI-01})$$

$\vec{F}$  Représente la résultante des forces extérieures appliquées;  $\vec{M}_O$  le moment de la force F au point O.

Les efforts extérieurs à un système matériel (S) sont les efforts exercés sur (S) par d'autres systèmes extérieurs. Si (S) est soumis à des forces localisées  $\vec{F}_i$  et des couples  $\vec{M}_i$ , le torseur des efforts extérieurs exercés sur un solide (S) en un point O, s'écrit :

$$[F]_O = \begin{cases} \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F_e) \end{cases} = \begin{pmatrix} \sum \vec{F}_i \\ \sum \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i \end{pmatrix} \quad (\text{VI-02})$$

### VI.3. Rappel de la dynamique des particules

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

#### VI.3.1. Première loi de Newton

Dans un repère absolu ( $R_0$ ), une particule  $\pi$  de masse  $m$  totalement isolée possède une quantité de mouvement constante. On écrit :  $\vec{P}_0 = m\vec{v}_0$  (VI-03)

### **VI.3.2. Deuxième loi de Newton**

Une particule ( $\pi$ ) est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant  $t$ , ces actions sont représentées par le vecteur force  $\vec{F}$  s'exerçant sur  $\pi$ .

On écrit : 
$$\vec{P}_0 = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_0) = \vec{F} = m\vec{\gamma}_0 \quad (\text{VI-04})$$

Où  $\vec{\gamma}_0$  est le vecteur accélération de la particule ( $\pi$ ).

### **VI.3.3. Troisième loi de Newton**

deux particule (A) et (B) soumis à des forces extérieur et au même temps ils sont en interaction entre eux, à la ligne d'action nous avons :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}, \quad \text{C'est le principe action-Réaction} \quad (\text{VI-05})$$

## **VI.4. Principe fondamental de dynamique appliquée aux systèmes matériels :**

Dans ce cas, on cherche à généralisation du PFD d'un point matériel à un principe fondamental qui s'applique aux systèmes matériels continus et discrets. Cette généralisation n'est que l'égalité entre le torseur de forces et le torseur dynamique

dans un point fixe du repère d'étude.  $[F]_{/0} = [D]_{/0} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} \sum \vec{F}_{\text{ext}} \\ \vec{M}_{/0}(\vec{F}_e) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \vec{D} \\ \vec{\delta}_0 \end{array} \right) \quad (\text{VI-06})$

Il en résulte deux équation vectorielles sont : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{\gamma}_G \\ \vec{M}_0(\vec{F}_e) = \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \end{array} \right. \quad (\text{VI-07})$$

### **VI.4.1. Cas particulier**

Si ( $\Delta$ ) est un axe principale d'inertie passant par le point le point (0) donc :

$$\sum \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (\text{VI-08})$$

## **VI.5. Théorème de la résultante cinétique**

L'égalité des moments des torseurs des efforts extérieurs et dynamique se traduit par :

$$\vec{M}_{/O}(\vec{F}_e) = \vec{\delta}_0 \quad (\text{VI-09})$$

si l'on écrit les torseurs en un point fixe A par rapport à un repère galiléen, on a la seconde équation du principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit :

$$\vec{M}_A(\vec{F}_e) = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \quad (\text{VI-10})$$

## VI.6. Solide mobile autour d'un axe fixe $\Delta$

On considère l'axe  $\Delta$  comme axe principal d'inertie, passant par un point O.

Le théorème du moment cinétique en O permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_{/O}(\vec{F}_e) = \Leftrightarrow I_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_e) \quad (\text{VI-11})$$

## VI.7. Théorème de l'énergie cinétique

### VI.7.1. Puissance et travail de force

#### VI.7.1.a. Puissance d'un Point Matériel

La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel (M) de vitesse  $\vec{v}(M)$  à l'instant (t) est :  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)$  (VI-12)

L'unité fondamentale de la puissance est le **Watts**

En outre, le travail élémentaire accompli pendant l'intervalle du temps (dt) :

$$dW = P \cdot dt \Leftrightarrow dw = \vec{F} \cdot \vec{v}(M) dt$$

$$\text{Sachant que } \vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \text{ donc } dW = \vec{F} \cdot \vec{OM} \quad (\text{VI-13})$$

L'unité fondamentale du travail élémentaire est **Joule**

### VI.7.2. Cas des solides indéformables

Le solide étant indéformable, si A et M sont deux points du solide, la puissance des efforts extérieurs est:

$$P = \int_D \vec{V}_M d\vec{F} = \int (\vec{V}_A + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}) d\vec{F}$$

$$P = \vec{V}_A \int d\vec{F} + \int (\vec{MA} \wedge \vec{\Omega}) d\vec{F} = \vec{V}_A \int d\vec{F} + \vec{\Omega} \int (\vec{MA} \wedge d\vec{F}) \quad (\text{VI-14})$$

Finalement, la puissance des efforts extérieurs pour un solide indéformable est le produit du torseur cinématique par le torseur des efforts extérieurs :

$$P = \vec{V}_A \vec{F}_e + \vec{\Omega} \vec{M}_A (F_e) = [V]_A [F_e]_A \quad (\text{VI-15})$$

### VI.8. L'énergie cinétique d'un système discontinu

$$\text{L'énergie cinétique d'un système discontinu s'écrit : } E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i^2 \quad (\text{VI-16})$$

$$\text{On a alors: } \frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \vec{\gamma}_i \quad (\text{VI-17})$$

$$\text{Connaissant : } m \vec{\gamma}_i = \vec{F}_i ,$$

$$\text{il vient : } \frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\gamma}_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n P_i = P \quad (\text{VI-18})$$

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique :  $E_C = P = (P_{\text{int}} + P_{\text{ext}})$  (VI-19)

#### VI.8.1. L'énergie cinétique d'un solide indéformable (continu)

$$\text{Dans le cas d'un solide continu, nous , } E_C = \frac{1}{2} \int_D \vec{V}^2 (M) dm \quad (\text{VI-20})$$

avons :

$$\text{Si A est un point du solide : } \frac{dE_C}{dt} = \int \vec{V}_M \vec{\gamma}_M dm = \int (\vec{V}_A + \vec{M}\vec{A} \wedge \vec{\Omega}) \vec{\gamma}_M dm \quad (\text{VI-21})$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \vec{V}_A \int \vec{\gamma}_M dm + \vec{\Omega} \int (\vec{M}\vec{A} \wedge \vec{\gamma}_M) dm = \vec{V}_A \cdot \vec{D} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\delta}_A = [V]_A [D]_A \quad (\text{VI-22})$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinétique et dynamique. Elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélération absolue, soit

$$: \frac{dE_C}{dt} = P_{\text{ext}} \quad (\text{VI-23})$$

### VI.9. Conservation de l'énergie mécanique

$$\text{Le théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire : } dE_C = P dt = dW \quad (\text{VI-24})$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel, on a alors :  $dW = -dU$

Le théorème de l'énergie cinétique devient donc :

$$E_c + U = \text{Constante} \quad (\text{VI-25})$$

La quantité  $E_c + U$  est appelée l'énergie mécanique totale du système considéré

### EXERCICES RESOLUS

#### EX:01

Un système est constitué de deux masses  $M$  et  $M'$  reliées entre elles par un câble inextensible qui passe sur une poulie de rayon  $R$ .

La masse  $M'$  est suspendue dans le vide et la masse  $M$  glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  (voir figure)

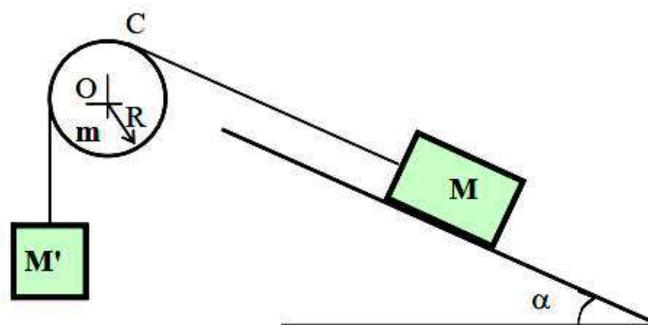
On néglige le frottement du câble sur la poulie. On demande d'écrire :

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie  $\vec{\Omega}$  et l'accélération  $\vec{a}_G$  des deux corps solides.

2- le principe fondamental de la dynamique et déterminer l'accélération du système en deux cas :

a) La masse de la poulie est négligeable ;

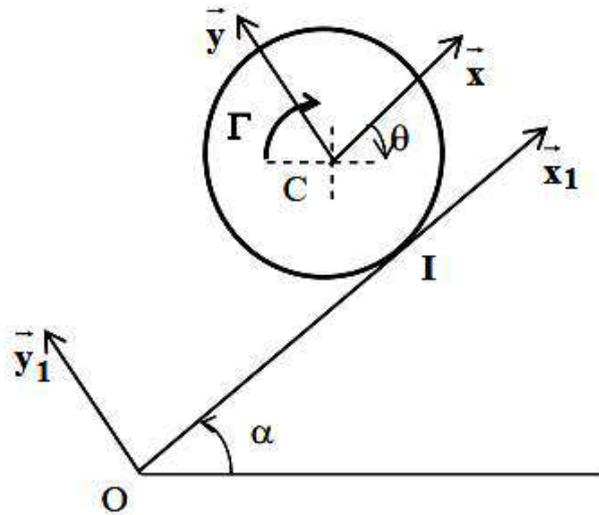
b) La masse de la poulie est égale à  $m$  ;



### EX:02

Un cylindre plein homogène de poids  $P$ , et de rayon  $r$ , est posé sur un plan incliné avec un angle  $\alpha$  (voir figure ). Il se déplace avec un couple moteur  $(-\Gamma \vec{z})$  et un taux de rotation  $(-\Omega \vec{z})$  ( $\Omega$  constante). Le coefficient de frottement du cylindre et le plan incliné étant  $f_s$ .

- 1- Ecrire les torseurs cinématique, cinétique, dynamique et les forces extérieures dans le centre  $C$  du cylindre.
- 2- Ecrire la condition pour que le cylindre monte le plan incliné sans glissement.
- 3- Déterminer l'énergie cinétique du cylindre.

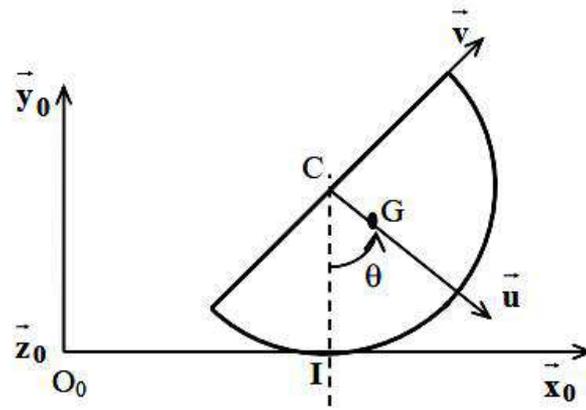


### EX:03

Un demi disque de rayon  $r$ , de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  peut osciller sans glissement au point de contact  $I$ , avec un angle  $\theta$ , dans le plan fixe  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le repère  $R(C, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$  est lié au solide tel que:

$$\vec{GC} = \lambda \vec{u} \quad (\text{voir} \quad \text{figure} \quad ).$$

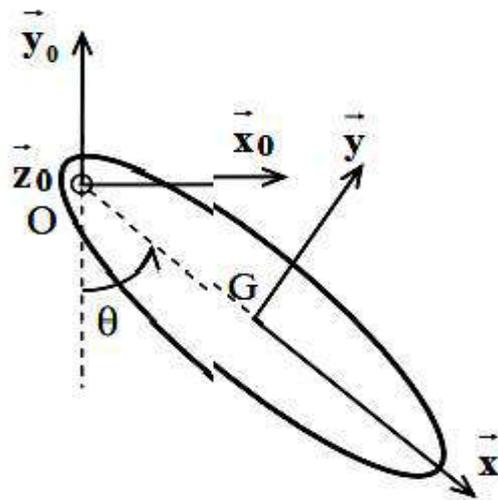
- On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.



**EX:04**

Un pendule pesant de poids  $P$ , de longueur  $2l$ , est fixé dans le point  $O$  par une liaison pivot parfaite (voir figure). A l'instant initial le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position verticale par un angle de rotation  $\theta$ . On demande d'écrire l'équation du mouvement en utilisant le :

- 1) principe fondamental de la dynamique
- 2) théorème de l'énergie cinétique



**EX:05**

Un disque homogène, de masse  $m$ , de rayon  $r$ , de centre  $G$ , est posé sans vitesse initiale sur un tapis roulant. Ce tapis, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, se déplace à la vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  ( $v_0 > 0$ ) suivant l'axe  $Ox_0$  d'un référentiel terrestre  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ , orthonormé et direct. On suppose que les forces

de contact en I admettent pour résultante  $\vec{R} = \vec{T} + N \vec{j}_0$  ( $N > 0$ ) où  $|T| = f N$ , avec  $f$  désignant le coefficient de frottement. On pose  $\vec{OG} = x_0 \vec{i} + r \vec{j}_0$

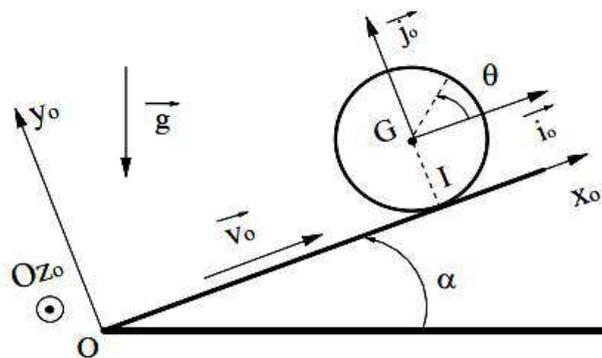
1- Calculer la vitesse de glissement  $\vec{v}_g(s_1/s_2)$  du disque ( $S_1$ ) sur le tapis ( $S_2$ ). En déduire la vitesse de glissement initiale  $\vec{v}_{g_0}(s_1/s_2)$  du disque sur le tapis.

2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au disque en mouvement dans  $R_0$  et trouver trois équations algébriques en projetant les deux équations vectorielles résultant du P.F.D. dans la base  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . On prendra les éléments de réduction des deux torseurs en question au point G.

3- Retrouver, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, deux équations algébriques de la question 2).

4- Trouver, en fonction de  $g$ ,  $f$ , et  $\alpha$ , la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement.

5- Utiliser les résultats de la question 4) pour décrire l'évolution de la vitesse de glissement du disque sur le tapis roulant.

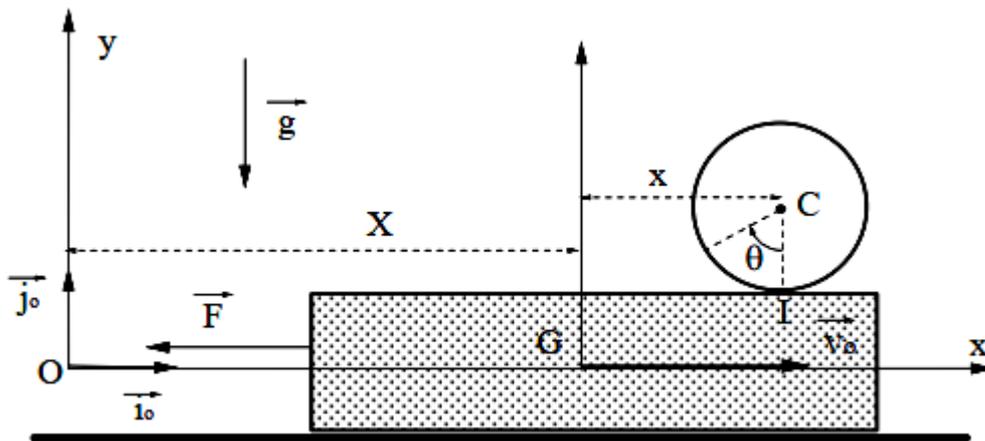


### **EX:06**

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d'un cylindre (C). Le plateau, de masse  $m$  est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse  $\vec{v}_0$ .

Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène, de masse  $m_1$ , de rayon  $a$  et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse  $\vec{v}_0$ . Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau.

A l'instant  $t = 0$ , on applique au plateau une force  $\vec{F}$  de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est:  $\vec{R} = \vec{T} + N \vec{j}_0$ , ( $N > 0$ ) Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est  $f$ . On désigne par  $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  le repère fixe et par  $R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  un repère lié au plateau. Le centre  $C$  du cylindre est repéré, par rapport à  $R_G$  par  $X = KI$  avec  $I \equiv K$  en  $x = 0$  à l'instant initial ( $t = 0$ ). La rotation du cylindre est repérée par l'angle  $\theta$  tel que  $\theta = 0$  à  $t = 0$ . Le mouvement de (P) par rapport au repère  $R_0$  est repéré par:  $\vec{x} = \overline{OG}$  avec  $X = 0$  pour  $t = 0$  et  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}_0$



A- Cas du roulement sans glissement du cylindre sur le plateau

- 1- a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.
- b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.
- 2- En appliquant le P.F.D. dans le repère  $R_0$  au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.
- 3- Trouver la relation liant  $\ddot{x}$  et  $\ddot{X}$ . En déduire que  $x(t) = \frac{Ft^2}{3m+m}$
- 4- Exprimer  $X(t)$  en fonction de  $F$ ,  $v_0$ ,  $m$ ,  $m_1$  et  $t$ . Trouver l'instant  $t_a$  correspondant à l'arrêt du plateau.
- 5- Sachant que le plateau restera immobile pour  $t \geq t_a$ , donner les valeurs de la force de frottement  $T$  et de  $\vec{v}(C/R_0)$
- 6- Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour  $t \geq t_a$

B- Cas du roulement avec glissement du cylindre sur le plateau

1- Donner l'expression de la force de frottement T.

2- Exprimer la vitesse de glissement,  $\vec{v}_g(c/p)$ , du cylindre (C) par rapport au plan (P) en fonction de  $m, m_1, F, f, g$  et  $t$  ( $g$  est l'accélération de la gravité).

3- Trouver, en fonction de  $m, m_1, F, f, g$ , l'instant  $t_1$  correspondant à l'arrêt du plateau.

4- Pour  $t \geq t_1$  le plateau restera immobile

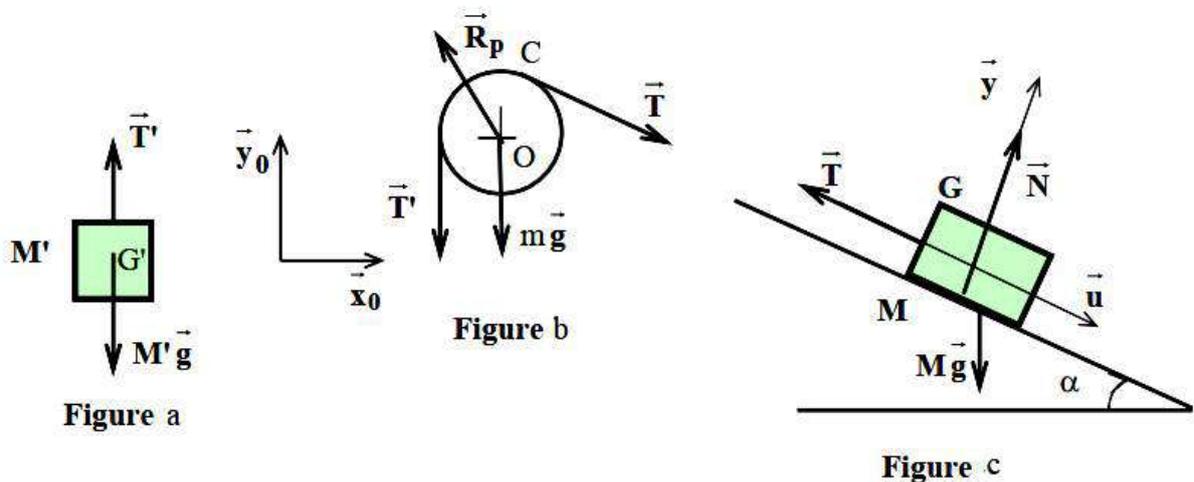
a) Déterminer  $\vec{v}_{(C/R_0)}$  en fonction  $m, m_1, F, f, g, v_0$  et  $t$ .

b) Trouver, en fonction de  $f, g$  et  $v_0$ , l'instant  $t_2$  où la vitesse de glissement s'annule.

5- Pour  $t > t_2$ , déterminer  $\vec{v}_{(C/R_0)}$  et préciser la nature du mouvement du cylindre.

**EX:01**

On supprime les liaisons dans la Figure et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans les Figures a, b et c .



1- la relation entre le taux de rotation de la poulie  $\vec{\Omega}$  et l'accélération  $\vec{a}_G$  des deux corps solides

Le vecteur vitesse du point de contact C entre le câble et la poulie s'écrit (Figure b) :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \vec{CO} \wedge \Omega \vec{z}_0 = -R\vec{v} \wedge \Omega \vec{z} = -R\Omega \vec{u}$$

Donc, le vecteur accélération de ce point est la dérivée de  $\vec{V}_C$  :

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = -R \frac{d\Omega}{dt} \vec{u}$$

Or, comme le câble est inextensible, et, il n'y a pas de glissement entre le câble et la poulie, les deux masses seront en mouvement de translation. Par conséquent, l'accélération des masses  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}'$  est égale à l'accélération du point C de la poulie, où

$$: \vec{a}_G = \vec{a}_c = -R \frac{d\Omega}{dt} \vec{u}$$

2 - Le principe fondamental de la dynamique et l'accélération du système;

a- La masse de la poulie est négligeable ;

- Le principe fondamental appliqué à la masse  $M'$  (Figure .a)

Le torseur dynamique au centre  $G'$  du corps solide de masse  $M'$  s'écrit :

$$[D]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_{G'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M' a_{G'} \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ( $[D]_{G'} = [Fe]_{G'}$ ), permet d'écrire:

$$T' - M'g = M'a_G \Leftrightarrow T' = M'a_G + M'g$$

- Le principe fondamental appliqué à la masse M (Figure c)

Le torseur dynamique au centre G du corps solide de masse M s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M a_G \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre G, s'obtient :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_G(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M g \sin \alpha - T) \vec{u} + (R - M g \cos \alpha) \vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ( $[D]_G = [Fe]_G$ ), permet d'écrire :

$$Mg \sin \alpha - T = M a_G \Leftrightarrow T = -M a_G + Mg \sin \alpha$$

**L'accélération du système  $a_G$  :**

Puisque le frottement est négligeable dans la poulie, la tension dans le câble reste

constante, on écrit :  $T = T'$ ,

On remplace les tensions  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  par leurs expressions respectives dans la relation ci dessus, on obtient l'accélération du système :

$$a_G = \frac{Mg \sin \alpha - M' g}{M + M'}$$

b- La masse de la poulie est égale à  $m$  ;

- Le principe fondamental appliqué à la poulie de masse  $m$  (Figure. b)

On écrit le torseur dynamique au centre  $O$  de la poulie :

$$[D]_O = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = I_{Oz} \frac{d\Omega \vec{z}_0}{dt} = \frac{mR^2}{2} \frac{d\Omega}{dt} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre  $O$  de la poulie, s'écrit :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{R}_p - M \vec{g} + \vec{T} + \vec{T}') \\ (-R T + R T') \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

L'égalité des moments des deux torseurs de la poulie, donne :

$$\frac{mR^2}{2} \frac{d\Omega}{dt} = -R T + R T'$$

$$\text{Or: } \vec{a}_G = \vec{a}_c = -R \frac{d\Omega}{dt} \vec{u}$$

$$\text{Ou encore : } -\frac{m}{2} a_G = T - T'$$

Cette équation nous permet d'obtenir l'accélération du système  $a_G$  :

$$a_G = \frac{Mg \sin \alpha - M' g}{M + M' + \frac{m}{2}}$$

Le même résultat obtenu pour  $a_G$  si  $m = 0$ .

### **EX:02**

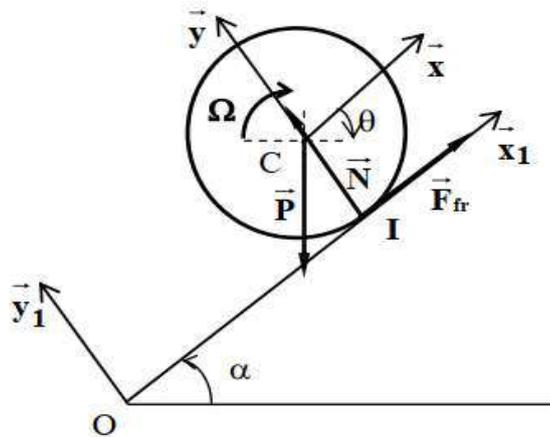


Figure 1

On supprime les liaisons dans la Figure et on les remplace par les réactions qui leur correspondent dans la Figure 1.

Le cylindre est en mouvement hélicoïdal :

- une rotation avec un taux de rotation  $\Omega$  dans le sens des aiguilles d'une montre;
- une translation d'une trajectoire  $x$ , du point O jusqu'au point I.

### 1.1- Le torseur cinématique au centre C, du cylindre :

Le taux de rotation du centre C du cylindre s'écrit :  $\vec{\Omega} = -\Omega \vec{z}$

$\vec{\Omega}$  positif lors de la montée

La vitesse de translation du centre C du cylindre par rapport au repère  $R_1$  est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{x} \vec{x}_1 + r \vec{y}_1) = \dot{x} \vec{x}_1$$

D'où le torseur cinématique au centre C du disque qui s'exprime :  $[V]_C = \begin{pmatrix} -\Omega \vec{z} \\ \dot{x} \vec{x}_1 \end{pmatrix}$

### 1.2- Le torseur cinétique au centre C, du cylindre

La quantité de mouvement au centre C du cylindre est :

$$\vec{p} = m\vec{V}_C = \frac{p}{g} \vec{V}_C = \frac{p}{g} \dot{x} \vec{x}_1$$

Le moment cinétique au centre C du cylindre :  $\vec{\sigma}_c = \mathbf{I}_{Cz} \vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{p}{g} r^2 \Omega \vec{z}$

D'où, Le torseur cinétique au centre C qui s'exprime :  $[C]_c = \begin{pmatrix} \frac{p}{g} \dot{x} \vec{x}_1 \\ -\frac{1}{2} \frac{p}{g} r^2 \Omega \vec{z} \end{pmatrix}$

1.3- Le torseur dynamique au centre C, du cylindre

La quantité d'accélération du centre C du cylindre est :

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{p}{g} \dot{x} \vec{x}_1 = \vec{0} \quad \text{car } \ddot{x} = 0$$

Le moment dynamique au centre C du cylindre :

$$\vec{\delta}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} = -\frac{p}{2g} r^2 \dot{\Omega} \vec{z}_1 = \vec{0} \quad \text{car } \dot{\Omega} = 0$$

Du fait de la condition de roulement sans glissement, le moment dynamique en C est donc nul.

#### 1.4 - Principe fondamental de la dynamique

De la figure. 1, on écrit le torseur des efforts extérieurs appliqués au centre C du cylindre:

$$[F_e]_c = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_c(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((-m + M) g \sin \alpha + F_{fr}) \vec{x} + (-m + M) g \cos \alpha + N) \vec{y} \\ (-\Gamma + r F_{fr}) \vec{z} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique ( $[D]_G = [F_e]_G$ , nous permet d'écrire trois équations scalaires :

$$\begin{cases} (-m + M) g \sin \alpha + F_{fr} = 0 \\ (-m + M) g \cos \alpha + N = 0 \\ -\Gamma + r F_{fr} = 0 \end{cases}$$

2- la condition pour que le cylindre monte le plan incliné sans glissement

Dans le cas du roulement sans glissement, la loi de coulomb s'écrit :  $F_{fr} \leq f_s N$

Ceci implique, avec les deux premières équations données par le principe fondamental, une première condition sur le coefficient de frottement et l'inclinaison :  $\text{tg } \alpha \leq f_s N$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le cylindre ne pourra en aucun cas monter sans glisser.

La dernière équation du principe fondamental nous permet d'écrire une condition sur le couple exercé :  $\Gamma \leq F_{fR} \Leftrightarrow \Gamma \leq f_s r (m + M)g \cos \alpha$

On constate que la montée est possible sans glissement si :

- le coefficient de frottement est assez grand (adhérence suffisante)
- le véhicule est suffisamment lourd
- le couple  $\Gamma$  n'est pas très important

### 3- L'énergie cinétique du cylindre

L'énergie cinétique du cylindre au centre C s'exprime :

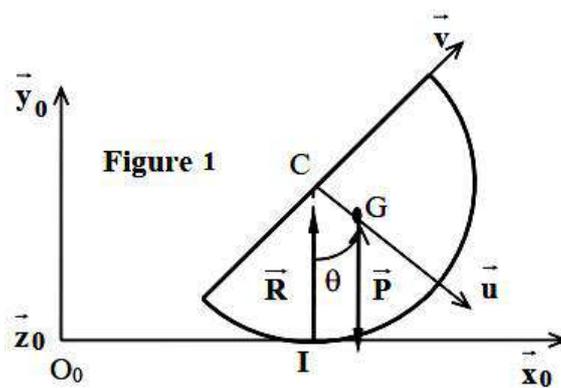
$$E_c = \frac{1}{2} \bar{\Omega} \bar{\sigma}_c + \frac{1}{2} \bar{v}_c p = \frac{1}{2} [v]_c [C]_c$$

On obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{p}{g} r^2 \Omega^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{p}{g} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \dot{x}^2 + \frac{1}{4} \frac{p}{g} r^2 \Omega^2$$

#### **EX:03**

On remplace les liaisons dans la Figure par les réactions qui leur correspondent dans la Figure .1



1- Le torseur cinématique dans le centre G du demi disque :

Sachant que le demi disque oscille avec un angle  $\theta$ , donc le vecteur taux de rotation du

demi disque s'écrit :  $\bar{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \bar{z}_0 = \dot{\theta} \bar{z}_0$

Et, la vitesse du centre G, s'obtient par la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable :  $\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}$

Or :  $\vec{V}_I = \vec{0}$ , car il y a oscillation sans glissement.

Et,

$$\vec{GI} = \vec{GC} + \vec{CI} = -\lambda \vec{u} - R y \vec{y}_0$$

Donc,

$$\vec{V}_G = (-\lambda \vec{u} - R \vec{y}_0) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = \lambda \dot{\theta} \vec{v}_0 - R \dot{\theta} \vec{x}_0$$

$$\text{Avec : } \vec{u} = \sin\theta \vec{x}_0 - \cos\theta \vec{y}_0$$

$$\vec{v} = \cos\theta \vec{x}_0 + \sin\theta \vec{y}_0$$

D'où :

$$\vec{V}_G = (\lambda \cos\theta - R) \dot{\theta} \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin\theta \vec{y}_0$$

Donc, le torseur cinématique au centre G, est :  $[V]_G = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{V}_G = (\lambda \cos\theta - R) \dot{\theta} \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin\theta \vec{y}_0 \end{pmatrix}$

2- le torseur cinétique au centre G du demi disque :

La quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m \vec{V}_G = \frac{p}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos\theta - R \dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin\theta \vec{y}_0$$

Et, le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_G = \vec{I}_G \dot{\theta} \vec{z}_0$$

Où  $I_G$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $(G, \vec{z}_0)$

D'où, le torseur cinétique au centre G est :  $[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} = \frac{p}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos\theta - R \dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin\theta \vec{y}_0 \\ \vec{\sigma}_G = \vec{I}_G \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$

Puisque, le solide étant indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} [v]_G [C]_G = \frac{1}{2} \vec{v}_G p + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{\sigma}_G$$

$$E_c = \frac{1}{2} [v]_G [C]_G = \frac{1}{2} \vec{v}_G p + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \vec{\sigma}_G$$

$$= \frac{1}{2} \left( \vec{p} = \frac{p}{g} (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \right) \left( (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}) \vec{x}_0 + \lambda \dot{\theta} \sin \theta \vec{y}_0 \right) \\ + \frac{1}{2} \dot{\theta} \vec{z}_0 (\vec{I}_G \dot{\theta} \vec{z}_0)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \left( (\lambda \dot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta})^2 + (\lambda \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{g} \lambda^2 - 2 \frac{p}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{p}{g} R^2 + I_G \right) \dot{\theta}^2$$

$$P_{\text{ext}} = \frac{dE_c}{dt} = \left( \frac{p}{g} \lambda^2 - 2 \frac{p}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{p}{g} R^2 + I_G \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{p}{g} \lambda R \sin \theta \dot{\theta}^3$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = [v]_G [F_e]_G = \vec{V}_G \cdot \vec{F}_e + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_0(F)$$

$$\text{La puissance de la réaction R est : } P_{\text{ext}}(R) = [v]_I [F_e]_I = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Comme il n'y a pas de glissement au point **I**, la puissance du poids P est :

$$P_{\text{ext}}(R) = [v]_G [F_e]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ v_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda p \dot{\theta} \sin \theta$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne alors :

$$P_{\text{ext}} = \frac{dE_c}{dt} \Leftrightarrow \left( \frac{p}{g} \lambda^2 - 2 \frac{p}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{p}{g} R^2 + I_G \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{p}{g} \lambda R \sin \theta \dot{\theta}^3 = -\lambda p \dot{\theta} \sin \theta$$

Donc, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left( \frac{p}{g} \lambda^2 - 2 \frac{p}{g} \lambda R \cos \theta + \frac{p}{g} R^2 + I_G \right) \ddot{\theta} + \frac{p}{g} \lambda R \sin \theta \dot{\theta}^2 + \lambda p \sin \theta = 0$$

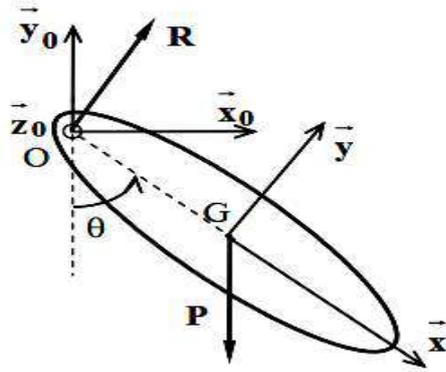
Où

$$(m \lambda^2 - 2m \lambda R \cos \theta - m R^2 + I_G) \ddot{\theta} + \lambda m R \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \lambda \sin \theta = 0$$

C'est l'équation du mouvement du demi disque de rayon **r**

#### **EX:04**

On remplace les liaisons dans la Figure par les réactions qui leur correspondent .



$$\vec{R} = R_x \vec{x} + R_y \vec{y}$$

$$\vec{OG} = L \vec{x}$$

**1.1-** Le torseur cinématique au centre G, du pendule est :

$$[V]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ I \dot{\theta} \vec{y} \end{pmatrix}$$

**1.2-** Le torseur cinétique au centre G du pendule :

$$[C]_G = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\sigma}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{g} I \dot{\theta} \vec{y} \\ I_G \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

**1.3-** Le torseur dynamique au centre G du pendule est :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pl}{g} (\dot{\theta} \vec{y} - \dot{\theta} \vec{x}) \\ I_G \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

A - L'équation du mouvement par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique, on écrit le torseur des forces extérieures au centre G du pendule :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} (R_x + p \cos \alpha) \vec{x} + (R_y - p \sin \alpha) \vec{y} \\ -R_y \vec{z} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique ( $[D]_G = [F_e]_G$ ) donne trois équations scalaires :

$$\begin{cases} -\frac{p l^2 \dot{\theta}^2}{g} = R_x + p \cos\theta & (1) \\ \frac{p l^2 \ddot{\theta}}{g} = R_y - p \sin\theta & (2) \\ I_G \ddot{\theta} = l R_y & (3) \end{cases}$$

On remplace  $R_y$  de l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient l'équation du mouvement en  $\theta(t)$  :  $(I_G + \frac{p}{g} l^2) \ddot{\theta} + p l \sin\theta = 0$  (4)

La solution de cette équation permet de calculer  $R_x$  et  $R_y$ .

B- L'équation du mouvement par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique :

Le pendule étant un solide indéformable, l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} [V]_G [C]_G = \frac{1}{2} \vec{v}_G \cdot p + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} \left( I_G + \frac{p}{g} l^2 \right) \dot{\theta}^2$$

La dérivée de l'énergie cinétique est donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \left( I_G + \frac{p}{g} l^2 \right) \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

D'autre part, la puissance des forces extérieures s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = [V]_G [F_e]_G = \vec{v}_G \cdot \vec{F}_e + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_O(F)$$

La puissance de la réaction R en O est :

$$P_{\text{ext}} = [V]_O [F_e]_O = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La puissance du poids P est :

$$P_{\text{ext}} = [V]_G [F_e]_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ l \dot{\theta} \vec{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \\ 0 \end{pmatrix} = -pl\dot{\theta}\sin\theta$$

Or, le théorème de l'énergie cinétique, s'écrit :

$$P_{\text{ext}} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \left( I_G + \frac{p}{g} l^2 \right) \dot{\theta} \ddot{\theta} = -pl \dot{\theta} \sin \theta \Leftrightarrow \left( I_G + \frac{p}{g} l^2 \right) \ddot{\theta} = -pl \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \left( I_G + \frac{p}{g} l^2 \right) \ddot{\theta} + pl \sin \theta = 0 \quad (5)$$

C'est l'équation du mouvement obtenue par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique qui est similaire à l'équation (4) obtenue par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique.

Puisque le système est conservatif, nous pouvons utiliser la conservation d'énergie :

Le potentiel U du poids P peut être calculé à partir de la relation :

$$dW = -P dz = -dU$$

$$W = mg(z_1 - z_2) = P(z_1 - z_2)$$

$$U = -Pl \cos \theta + \text{const}$$

$$E_c + U = \frac{1}{2} (I_G + m l^2) \dot{\theta}^2 - Pl \cos \theta = \text{const}$$

Cette équation est une intégrale première de l'équation (5).

Dans la position initiale:  $\theta = 0$  ,  $\text{const} = Pl$

Le taux de rotation est calculé comme suit :  $\dot{\theta}^2 = \frac{2p(1+\cos \theta)}{I_G + m l^2}$

Cette équation est une intégrale première de l'équation obtenue précédemment en (5)

### **EX:05**

$$\vec{v}_g(s_1/s_2) = \vec{v}(I \in (s_1/R_0)) - \vec{v}(I \in (s_2/R_0)) = (\dot{x}_c + r\dot{\theta} - v_0)\vec{i}_0$$

$$\vec{v}_{g_0}(s_1/s_2) = -v_0 \vec{i}, \text{ car le disque est posé sans vitesse initiale } \Rightarrow \dot{x}_c = \dot{\theta} = 0$$

$$2- \text{P.F.D} \Rightarrow [D(s_1/R_0)] = [F_{\text{ext}} \rightarrow s_1/R_0]$$

(torseur dynamique = torseur des forces extérieures agissant sur le solide).

Egalité des torseurs  $\Rightarrow$  égalité des résultantes (théorème du centre de masse) et égalité des moments (théorème du moment cinétique) ; i.e.

$$m\vec{\gamma}(G/R_0) = T\vec{i}_0 - N\vec{j}_0 - mg \cos \alpha \vec{j}_0 - mg \sin \alpha \vec{i}_0 \quad (\text{théorème du centre de masse})$$

$$\vec{\delta}(G, s_1/R_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, s_1/R_0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{M}(G, F_{\text{ext}} \rightarrow s_1/R_0)$$

$$\vec{\delta}(G, s_1/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}(G, s_1/R_0)}{dt} = m \frac{r^2}{2} \ddot{\theta} \vec{k}_0$$

$$\vec{M}(G, F_{\text{ext}} \rightarrow s_1/R_0) = \vec{GI} \wedge T \vec{i}_0 = r T \vec{k}_0$$

La projection des équations vectorielles conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \frac{T}{m} - g \sin \alpha \\ N = mg \cos \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = \frac{T}{mr}$$

$$3- E_c(s_1/R_0) = \frac{1}{2} m v_{(G/R_0)}^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G} \dot{\theta}^2$$

$$E_c(s_1/R_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}_c^2 + \frac{1}{4} r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_c(s_1/R_0)}{dt} = \frac{1}{2} m \dot{x}_c \ddot{x}_c + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$p(F_{\text{ext}} \rightarrow s_1/R_0) = \vec{R} \cdot \vec{v}(G, R_0) + \vec{M}(G, F_{\text{ext}} \rightarrow s_1/R_0) \cdot \vec{\Omega}(s_1/R_0)$$

$$= (T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0 - mg \cos \alpha \vec{j}_0 - mg \sin \alpha \vec{i}_0) \cdot \dot{x}_c \vec{i}_0 - Tr \vec{k}_0 \cdot \dot{\theta} \vec{k}_0$$

$$= (T - mg \sin \alpha) \dot{x}_c - Tr \dot{\theta}$$

D'où :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}_c \ddot{x}_c + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = (T - mg \sin \alpha) \dot{x}_c - Tr \dot{\theta}$$

**Remarque :** L'équation de l'énergie permet en général d'aboutir à une seule équation algébrique. Cependant, dans le présent cas l'identification (valable pour des conditions spécifiques) peut être utilisée ici pour conduire à:

$$\ddot{x}_c = \frac{T}{m} - g \sin \alpha$$

$$\ddot{\theta} = \frac{T}{mr}$$

$$4- \left. \frac{d g(s_1/s_2)}{dt} \right|_{R_0} = (\ddot{x}_c + r \ddot{\theta}) \vec{i}_0$$

Puisque :

$$\vec{v}_{g_0}(s_1/s_2) = -v_0 \vec{i}_0 \Rightarrow T \vec{i}_0 = fN \vec{i}_0 = mg \cos \alpha \vec{i}_0$$

En remplaçant T par  $fmg \cos \alpha$  dans les expressions de  $\ddot{x}_c$  et  $\ddot{\theta}$ , on obtient :

$$\left. \frac{d\vec{v}_g}{dt} \right|_{R_0} = 3g \cos \alpha \left( f - \frac{\text{tg} \alpha}{3} \right) \vec{i}_0 = \frac{dv_g}{dt} \vec{i}_0$$

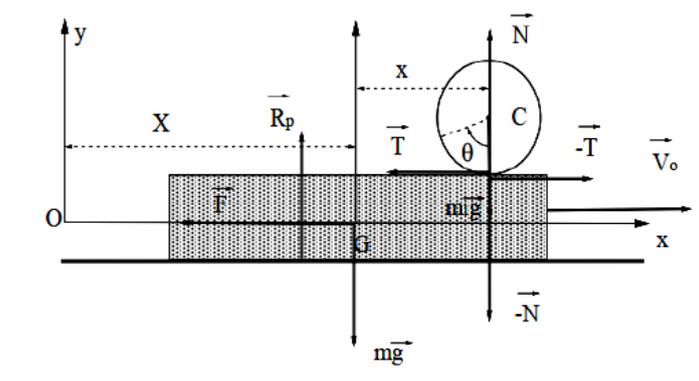
5- En utilisant 4) on peut déduire ce qui suit:

Si  $f > \frac{\text{tg} \alpha}{3} \Rightarrow v_g$  croît à partir de  $-v_0$  jusqu'à zéro  $\Rightarrow$  d'abord il y a glissement puis absence de glissement à partir du moment où  $v_g$  va s'annuler.

Si  $f < \frac{\text{tg} \alpha}{3} \Rightarrow v_g$  décroît à partir de  $-v_0$  jusqu'à zéro  $\Rightarrow$  il y aura toujours glissement.

### **EX:06**

1-a) Voir schéma



$$b) \vec{v}_g(c/P) = \vec{v}(I \in c/R_G) = \vec{v}(c/R_G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = (\dot{x} - a \dot{\theta}) \vec{i}_0$$

avec:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(c/R_G) = -\dot{\theta} \vec{k}_0$$

2) P.F.D. pour le cylindre :

$$\begin{cases} m_1 \vec{\gamma}(c/R_0) = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{\delta}(c, c/R_0) = -a \vec{j}_0 \wedge \vec{T} \Rightarrow \frac{d \vec{\sigma}(c, c/R_0)}{dt} = -aT \vec{k}_0 \end{cases}$$

Par projection sur les axes :

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x} + \ddot{X}) = -T & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -N - m_1 g & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I\ddot{\theta} = -\frac{m_1 a^2}{2} \ddot{\theta} = -aT & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} = \frac{m_1 a^2}{2} \ddot{\theta} = aT & (4) \end{cases}$$

Théorème du centre de masse pour le plateau :

$$m_1 \vec{\gamma}(c/R_0) = m\vec{g} + \vec{R}_p - \vec{T} - \vec{N} + \vec{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{X} = T - F & (5) \\ 0 = R_p - N - mg & (6) \end{cases}$$

$$3) \text{ En utilisant les équations (1) (après dérivation) et (4) } \Rightarrow \frac{m_1 \ddot{x}}{2} = T \quad (7)$$

$$\text{L'équation (7) dans l'équation (1) } \Rightarrow (m_1 \ddot{x} + m_1 \ddot{X}) = -T$$

$$\ddot{X} + \frac{3}{2} \ddot{x} = 0 \quad (8)$$

$$\text{Les équations (7) et (8) dans l'équation (5) } \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} = -\frac{m_1}{2} \ddot{x} + F$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{2F}{3m + m_1} \quad (9)$$

$$\text{Donc : } \quad x(t) = \frac{F t^2}{3m + m_1}$$

$$4) \text{ L'équation (9) dans l'équation (8) } \Rightarrow \ddot{X} = -\frac{3F}{3m + m_1} \Rightarrow \dot{X} = -\frac{3Ft}{3m + m_1} + v_0 \quad (10)$$

$$\text{Donc : } x(t) = -\frac{3F t^2}{2(3m + m_1)} + v_0 t$$

L'instant  $t_a$  correspondant à l'arrêt du plateau correspond à  $\dot{X}(t) = 0$

$$\Rightarrow t_a = \frac{v_0(3m + m_1)}{3F} \quad (11)$$

5) Pour  $t \geq t_a$ , le plateau s'immobilise  $\Rightarrow \dot{X}(t) = \ddot{X}(t) = 0$

L'équation (3) devient :  $m_1 \dot{x} = -T$  et, d'après (7), on a :  $m_1 \ddot{x} = 2T \Rightarrow T = 0$

Ainsi  $m_1 \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Cte = \dot{x}(t_a)$

Pour  $t \geq t_a$  et, en utilisant (8), on aura :  $\ddot{X} + \frac{3}{2}\dot{x} = v_0$  pour  $t = t_a, \dot{X} = 0$  et  $\dot{x} = \frac{2}{3}v_0$

Or  $\vec{v}(c/R_0) = \vec{v}(c/R_G) + \vec{v}_e = \vec{v}(c/R_G) = \dot{x}(t)\vec{I}_0 = \frac{2}{3}v_0\vec{I}_0$

Le mouvement du cylindre est uniforme.

B- Cas du roulement avec glissement

1) Le P.F.D. appliqué au cylindre seul :

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x} + \ddot{X}) = -T & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = m_1 g & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -I\ddot{\theta} = -\frac{m_1 a^2}{2}\ddot{\theta} = -a T & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |T| = f N & (4) \end{cases}$$

Le P.F.D. appliqué au plateau seul :

$$m \ddot{X} = T - F \quad (5)$$

$$T = f m_1 g \quad (6)$$

$$2) \vec{v}_g(c/P) = \vec{v}(I \in c/R_G) = -\vec{v}(p/R_G) = \vec{v}(I \in c/R_G) = (\dot{x} - a \dot{\theta})\vec{I}_0 \quad (7)$$

L'équation (5)  $\Rightarrow \ddot{X} = \frac{T-F}{m}$  et d'après (1),  $(\ddot{x} + \ddot{X}) = -f g$

Donc :

$$\ddot{x} = -f g + \frac{F-T}{m} = \frac{F-fg(m+m_1)}{m} \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{F-fg(m+m_1)}{m} t \quad (8)$$

$$L'équation (3) \Rightarrow a \dot{\theta} = 2fgt \quad (9)$$

$$\text{Les équations (8) et (9) dans (7) } \Rightarrow \vec{v}_g(c/P) = \frac{F-fgt(3m+m_1)}{m}$$

$$3) L'équation (5) \Rightarrow \ddot{X} = \frac{t(fm_1g-F)}{m} + v_0$$

$$\dot{X}(t) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{mv_0}{F - fm_1g} \quad (10)$$

4) Pour  $t \geq t_1$ , le plateau est immobile  $\Rightarrow \ddot{X}(t) = \dot{X}(t) = 0 \Rightarrow \vec{v}(c/R_0) = \vec{v}(c/R_G) = \dot{x}(t)\vec{i}_0$

En utilisant (1), on obtient:

$$\dot{x}(t) = -fgt + Cte \quad (11)$$

Pour  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $\dot{x}(t)$  est donné par (8), donc:

$$\dot{x}(t_1) = \frac{F-fg(m+m_1)}{m} t_1 = \frac{F-fg(m+m_1)}{F-fm_1g} v_0$$

$$\vec{v}_g(c/P) = \dot{x} - a\dot{\theta} = fg(t_1 - t) + \frac{F-fg(m+m_1)}{F-fm_1g} v_0 - 2fgt = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{3fg}$$

5) Pour  $t \geq t_2$ ,  $v_g = 0 \Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta}$

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x} + \ddot{X}) = m_1\ddot{x} = -T \\ \frac{m_1 a}{2} \ddot{\theta} = \frac{m_1 \dot{x}}{2} = T \end{cases} \Rightarrow T = 0 \Rightarrow m_1\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = Cte = \dot{x}(t_2)$$

$$\dot{x}(t_2) = fg(t_1 - t_2) + \dot{x}(t_1) = \frac{2}{3} v_0$$

$T = 0 \Rightarrow$  Le mouvement est uniforme.

## \* Bibliographie

- 1- Tahar HANI, "Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours ", Office des publications Universitaires, 1983, 386p.
- 2- Mécanique à l'usage des ingénieurs. STATIQUE. Edition Russell. Ferdinand P. Beer
- 3- Mécanique générale. Cours et exercices corrigés. Sylvie Pommier. Yves Berthaud. DUNOD.
- 4- Mécanique générale - Théorie et application, Editions série. MURAY R. SPIEGEL schaum, 367p.
- 5- Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus
- 6- Hamzaoui N., Mécanique Rationnelle (Module TEC005), polycopie, USTHB, 1986, 90p
- 7- STARJINSKI, "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou), 479p
- 8- MCGILL D.J., WING W.W., "Engineering mechanics- Dynamics", Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston, 1989, 608p
- 9- Combarous M., Desjardins D., Bacon C., "Mécaniques des solides – Cours et Exercices corrigés", 2<sup>eme</sup> édition, Dunod, 199p
- 10- DELANETTE M., DUBOIS M., " Mécanique théorique et appliquée", Librairie de la grave, Paris, 1986.
- 11- A. Kadi : *Mécanique Rationnelle Cours & Exercices Résolus.*
- 12- M. Bourich : *Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables Deuxième Edition 2014*
- 13-KASSOUL. A, Mécanique Rationnelle), polycopie, Université Hassiba Benbouali de Chlef