Exercices Chapitre 2

Ces exercices ont permis de mettre en pratique :

- La construction de tableaux de fréquences cumulées pour des variables **ordinales**, **discrètes** et **continues**.
- Le calcul et l'interprétation de **fréquences cumulées** dans des contextes zootechniques (NEC, prolificité, poids, production laitière) et épidémiologiques (traitements antibiotiques, âge au premier vêlage, âge de réforme).
- La construction et la lecture de la **fonction de répartition** pour une variable discrète (fonction en escalier) et une variable continue (interpolation linéaire).
- L'utilisation de la fonction de répartition pour répondre à des questions concrètes : proportion d'animaux en dessous ou au-dessus d'un seuil, estimation d'une proportion par interpolation.
- La **comparaison de deux lots** à l'aide des fréquences cumulées, avec interprétation en termes d'effet d'un aliment.
- L'interprétation des résultats en termes de **gestion d'élevage** et de **santé animale**.

Ces compétences sont indispensables pour aborder le chapitre 3, consacré aux caractéristiques de tendance centrale (moyenne, médiane, mode, quantiles) et de dispersion (variance, écart-type, écart interquartile).

Exercice 1 – Fréquences cumulées pour une variable ordinale

Dans un élevage de 50 vaches laitières, on a relevé la note d'état corporel (NEC) sur une échelle de 1 à 5. Les effectifs sont les suivants : NEC 1 : 5 vaches ; NEC 2 : 10 vaches ; NEC 3 : 20 vaches ; NEC 4 : 10 vaches ; NEC 5 : 5 vaches.

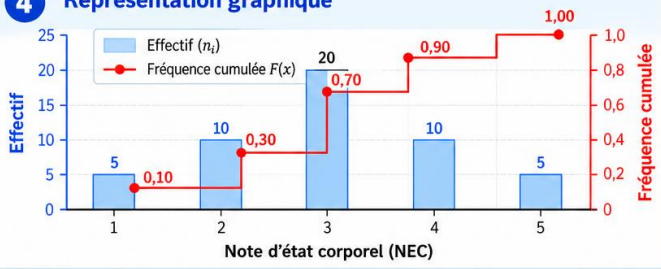
1. Construire le tableau de distribution avec effectifs, fréquences, effectifs cumulés et fréquences cumulées.
2. Interpréter la fréquence cumulée pour NEC = 3.
3. Quelle proportion de vaches a une NEC strictement supérieure à 3 ?

Dans un élevage de 50 vaches laitières, on a relevé la note d'état corporel (NEC) sur une échelle de 1 à 5. Les effectifs sont les suivants :
NEC 1 : 5 vaches ; NEC 2 : 10 vaches ; NEC 3 : 20 vaches ;
NEC 4 : 10 vaches ; NEC 5 : 5 vaches.

1 Tableau de distribution

NEC (x_i)	Effectif n_i	Fréquence $f_i = n_i/N$	Effectif cumulé N_i	Fréquence cumulée $F_i = N_i/N$
1	5	0,10 (10 %)	5	0,10 (10 %)
2	10	0,20 (20 %)	15	0,30 (30 %)
3	20	0,40 (40 %)	35	**0,70 (70 %)**
4	10	0,20 (20 %)	45	0,90 (90 %)
5	5	0,10 (10 %)	50	1,00 (100 %)
Total	**50**	**1,00 (100 %)**	**50**	**1,00 (100 %)**

4 Représentation graphique



2 Interprétation de la fréquence cumulée pour NEC = 3

$$F(3) = 0{,}70 = 70\,\%$$

Cela signifie que **70 %** des vaches ont une note d'état corporel inférieure ou égale à 3, soit **35 vaches** sur 50.

3 Proportion de vaches ayant une NEC strictement supérieure à 3

Les vaches concernées ont une NEC égale à 4 ou à 5.

$$n(NEC > 3) = 10 + 5 = 15$$

La proportion correspondante est :

$$p = \frac{15}{50} = 0{,}30 = 30\,\%$$

Donc, **30 %** des vaches, soit 15 vaches sur 50, ont une NEC strictement supérieure à 3.

Par complémentarité :

$$P(NEC > 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

Solution

1. Tableau de distribution

NEC	Effectif *ni*	Fréquence *fi*	Effectif cumulé *Ni*	Fréquence cumulée *Fi*
1	5	0,10	5	0,10
2	10	0,20	15	0,30
3	20	0,40	35	0,70
4	10	0,20	45	0,90
5	5	0,10	50	1,00
Total	**50**	**1,00**		

Calculs : f_1=5/50=0,10 ; f_2=10/50=0,20 ; f_3=20/50=0,40 ; f_4=10/50=0,20 ; f_5=5/50=0,10.

2. Interprétation de *F*(3)=0,70

70 % des vaches ont une NEC inférieure ou égale à 3 (c'est-à-dire un état corporel moyen ou maigre). Autrement dit, plus des deux tiers du troupeau ont un état corporel insuffisant ou moyen.

3. Proportion de vaches avec NEC > 3

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

Soit 30 % des vaches ont une NEC strictement supérieure à 3 (NEC 4 ou 5).

Interprétation zootechnique : Seules 30 % des vaches ont un bon état corporel. Cela peut indiquer un problème de rationnement ou de gestion de la reproduction.

Exercice 2 – Fréquences cumulées pour une variable discrète

Dans un élevage porcin, on a relevé le nombre de porcelets par portée sur 80 portées :

Nombre de porcelets	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Effectif	4	10	20	26	14	6

1. Construire le tableau complet avec fréquences cumulées.
2. Quelle proportion de portées a 9 porcelets ou moins ?
3. Quelle proportion de portées a strictement plus de 10 porcelets ?
4. Quelle est la valeur médiane approximative ?

Solution

1. Tableau complet

Nombre de porcelets	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***
7	4	0,050	4	0,050
8	10	0,125	14	0,175
9	20	0,250	34	0,425
10	26	0,325	60	0,750
11	14	0,175	74	0,925
12	6	0,075	80	1,000
Total	**80**	**1,000**		

2. Proportion de portées avec 9 porcelets ou moins

$$F(9) = 0{,}425$$

Soit 42,5 % des portées ont 9 porcelets ou moins.

3. Proportion de portées avec strictement plus de 10 porcelets

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - 0{,}750 = 0{,}250$$

Soit 25 % des portées ont 11 ou 12 porcelets.

4. Valeur médiane approximative

La médiane est la valeur x telle que $F(x) \geq 0{,}5$

$$F(9) = 0{,}425 < 0{,}5 \; et \; F(10) = 0{,}750 \geq 0{,}5$$

Donc la médiane est 10 porcelets. Cela signifie que la moitié des portées ont 10 porcelets ou moins, et l'autre moitié 10 porcelets ou plus.

Interprétation zootechnique : La prolificité médiane est de 10 porcelets. La distribution est légèrement asymétrique à droite (quelques portées de 12 porcelets).

Exercice 3 – Fréquences cumulées pour une variable continue

On a pesé 120 agneaux à la naissance. Les poids (en kg) sont regroupés en classes :

Classe de poids (kg)	**[2 – 3[**	**[3 – 4[**	**[4 – 5[**	**[5 – 6[**	**[6 – 7[**
Effectif	6	18	42	36	18

1. Construire le tableau complet avec fréquences cumulées.
2. Quelle proportion d'agneaux pèse moins de 5 kg ?
3. Quelle proportion d'agneaux pèse 5 kg ou plus ?
4. Estimer par interpolation linéaire la proportion d'agneaux pesant moins de 4,5 kg.

Solution

1. Tableau complet

Classe de poids (kg)	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***
[2 – 3[	6	0,05	6	0,05
[3 – 4[	18	0,15	24	0,20
[4 – 5[	42	0,35	66	0,55
[5 – 6[	36	0,30	102	0,85
[6 – 7[	18	0,15	120	1,00
Total	**120**	**1,00**		

Calculs : f_1=6/120=0,05 ; f_2=18/120=0,15 ; f_3=42/120=0,35 ; f_4=36/120=0,30 ; f_5=18/120=0,15.

2. Proportion d'agneaux pesant moins de 5 kg

$$F(5) = 0{,}55$$

Soit 55 % des agneaux pèsent moins de 5 kg.

3. Proportion d'agneaux pesant 5 kg ou plus

$$P(X \geq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

Soit 45 % des agneaux pèsent 5 kg ou plus.

4. Proportion d'agneaux pesant moins de 4,5 kg (interpolation linéaire)

4,5 kg se trouve dans la classe [4 – 5[.

On sait que $F(4)=0{,}20$ et $F(5)=0{,}55$.

$$F(4{,}5) = F(4) + \frac{4{,}5 - 4}{5 - 4} \times (F(5) - F(4))$$

$$F(4{,}5) = 0{,}20 + 0{,}5 \times (0{,}55 - 0{,}20) = 0{,}20 + 0{,}5 \times 0{,}35 = 0{,}20 + 0{,}175 = 0{,}375$$

Soit 37,5 % des agneaux pèsent moins de 4,5 kg.

Interprétation zootechnique : Plus d'un tiers des agneaux ont un poids de naissance inférieur à 4,5 kg, ce qui peut être un facteur de risque de mortalité néonatale.

Exercice 9 – Fonction de répartition d'une variable discrète

On a relevé le nombre de traitements antibiotiques reçus par 50 animaux au cours d'une année :

Nombre de traitements	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Effectif	8	15	17	7	3

1. Construire le tableau des fréquences cumulées.
2. Tracer (décrire) la fonction de répartition.
3. Calculer $F(2)$ et interpréter.
4. Calculer $P(X>2)$.

Solution EXERCICE 9

1. Tableau des fréquences cumulées

Nombre de traitements	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***
0	8	0,16	8	0,16
1	15	0,30	23	0,46
2	17	0,34	40	0,80
3	7	0,14	47	0,94
4	3	0,06	50	1,00
Total	**50**	**1,00**		

2. Description de la fonction de répartition

La fonction de répartition est une **fonction en escalier** :

- $F(x)=0$ pour $x<0$.
- $F(x)=0{,}16$ pour $0\leq x<1$.
- $F(x)=0{,}46$ pour $1\leq x<2$.
- $F(x)=0{,}80$ pour $2\leq x<3$.
- $F(x)=0{,}94$ pour $3\leq x<4$.
- $F(x)=1$ pour $x\geq 4$.

3. Calcul et interprétation de $F(2)$

$$F(2) = 0{,}80$$

80 % des animaux ont reçu 2 traitements antibiotiques ou moins au cours de l'année. Cela signifie que seulement 20 % des animaux ont reçu 3 traitements ou plus.

4. Calcul de $P(X>2)$

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

Soit 20 % des animaux ont reçu strictement plus de 2 traitements.

Interprétation épidémiologique : La majorité des animaux (80 %) reçoivent au plus 2 traitements par an. Les animaux recevant 3 traitements ou plus (20 %) pourraient être des animaux à risque ou chroniquement malades, à surveiller de près.

Exercice 10 – Fonction de répartition et interpolation linéaire

On étudie la production laitière journalière (en litres) de 200 vaches. Les données sont regroupées en classes :

Production (L/j)	**[10 – 15[**	**[15 – 20[**	**[20 – 25[**	**[25 – 30[**	**[30 – 35[**
Effectif	10	30	60	70	30

1. Construire le tableau des fréquences cumulées.
2. Quelle proportion de vaches produit moins de 25 L/j ?
3. Estimer par interpolation linéaire la proportion de vaches produisant moins de 22 L/j.
4. Quelle proportion de vaches produit 30 L/j ou plus ?

Solution exercice 10

1. Tableau des fréquences cumulées

Classe de production (L/j)	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***

[10 – 15[	10	0,05	10	0,05
[15 – 20[	30	0,15	40	0,20
[20 – 25[	60	0,30	100	0,50
[25 – 30[	70	0,35	170	0,85
[30 – 35[	30	0,15	200	1,00
Total	**200**	**1,00**		

2. Proportion de vaches produisant moins de 25 L/j

$$F(25) = 0{,}50$$

Soit 50 % des vaches produisent moins de 25 L/j.

3. Proportion de vaches produisant moins de 22 L/j (interpolation linéaire)

22 L/j se trouve dans la classe [20 – 25[.

On sait que $F(20)=0{,}20$ et $F(25)=0{,}50$.

$$F(22) = F(20) + \frac{22-20}{25-20} \times \big(F(25) - F(20)\big)$$

$$F(22) = 0{,}20 + \frac{2}{5} \times (0{,}50 - 0{,}20) = 0{,}20 + 0{,}4 \times 0{,}30 = 0{,}20 + 0{,}12 = 0{,}32$$

Soit 32 % des vaches produisent moins de 22 L/j.

4. Proportion de vaches produisant 30 L/j ou plus

$$P(X \geq 30) = 1 - F(30) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

Soit 15 % des vaches produisent 30 L/j ou plus.

Interprétation zootechnique : La moitié du troupeau produit moins de 25 L/j, ce qui peut être considéré comme une production modérée. Seules 15 % des vaches atteignent 30 L/j ou plus, ce qui identifie les animaux à haut potentiel.

Exercice 11 – Application épidémiologique : âge au premier vêlage

Dans une étude épidémiologique, on s'intéresse à l'âge au premier vêlage (en mois) de 100 génisses. Les données sont regroupées en classes :

Âge (mois)	**[24 – 27[**	**[27 – 30[**	**[30 – 33[**	**[33 – 36[**	**[36 – 39[**
Effectif	8	22	40	20	10

1. Construire le tableau des fréquences cumulées.
2. Quelle proportion de génisses a vêlé avant 30 mois ?
3. Quelle proportion de génisses a vêlé à 33 mois ou après ?
4. Estimer par interpolation linéaire la proportion de génisses ayant vêlé avant 31 mois.

5. Interpréter ces résultats en termes de gestion de la reproduction.

Solution EXERCICE 11

1. Tableau des fréquences cumulées

Âge (mois)	Effectif *ni*	Fréquence *fi*	Effectif cumulé *Ni*	Fréquence cumulée *Fi*
[24 – 27[	8	0,08	8	0,08
[27 – 30[	22	0,22	30	0,30
[30 – 33[	40	0,40	70	0,70
[33 – 36[	20	0,20	90	0,90
[36 – 39[	10	0,10	100	1,00
Total	**100**	**1,00**		

2. Proportion de génisses ayant vêlé avant 30 mois

$$F(30) = 0{,}30$$

Soit 30 % des génisses ont vêlé avant 30 mois (âge ≤ 30 mois).

3. Proportion de génisses ayant vêlé à 33 mois ou après

$$P(X \geq 33) = 1 - F(33) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

Soit 30 % des génisses ont vêlé à 33 mois ou après.

4. Proportion de génisses ayant vêlé avant 31 mois (interpolation linéaire)

31 mois se trouve dans la classe [30 – 33[.

On sait que $F(30) = 0{,}30$ *et* $F(33) = 0{,}70$.

$$F(31) = F(30) + \frac{31 - 30}{33 - 30} \times \big(F(33) - F(30)\big)$$

$$F(31) = 0{,}30 + \frac{1}{3} \times (0{,}70 - 0{,}30) = 0{,}30 + 0{,}333 \times 0{,}40 \approx 0{,}30 + 0{,}133 = 0{,}433$$

Soit environ 43,3 % des génisses ont vêlé avant 31 mois.

5. Interprétation en gestion de la reproduction

- 30 % des génisses vêlent avant 30 mois, ce qui est un objectif souvent recherché en élevage laitier (âge optimal au premier vêlage : 24–30 mois).
- 70 % des génisses vêlent après 30 mois, ce qui peut représenter un coût supplémentaire (prolongation de la période improductive).

- La médiane se situe dans la classe [30 – 33[: environ 50 % des génisses ont vêlé avant 31,5 mois (calcul : $F(30)=0{,}30$, $F(33)=0{,}70$, donc la médiane est à $30+3\times\frac{0{,}5-0{,}30}{0{,}70-0{,}30}=30+3\times\frac{0{,}5-0{,}30}{0{,}70-0{,}30}=30+3\times0{,}5=31{,}5$ mois).
- Ces résultats suggèrent qu'il faut améliorer la conduite de la reproduction (détection des chaleurs, alimentation des génisses) pour abaisser l'âge au premier vêlage.

Exercice 12 – Classes d'amplitudes inégales et interpolation

On étudie le poids de carcasse (en kg) de 200 bovins abattus. Les données sont regroupées en classes d'amplitudes inégales :

Classe de poids (kg)	Effectif
[200 – 250[	20
[250 – 300[	40
[300 – 350[	60
[350 – 400[	50
[400 – 500[	30

1. Construire le tableau complet avec effectifs, fréquences, effectifs cumulés et fréquences cumulées.
2. Quelle proportion de carcasses pèse moins de 350 kg ?
3. Estimer par interpolation linéaire la proportion de carcasses pesant moins de 370 kg.
4. Quelle proportion de carcasses pèse 400 kg ou plus ?

Solution EXERCICE 12

1. Tableau complet

Classe de poids (kg)	Effectif *ni*	Fréquence *fi*	Effectif cumulé *Ni*	Fréquence cumulée *Fi*
[200 – 250[	20	0,10	20	0,10
[250 – 300[	40	0,20	60	0,30
[300 – 350[	60	0,30	120	0,60
[350 – 400[	50	0,25	170	0,85
[400 – 500[	30	0,15	200	1,00
Total	**200**	**1,00**		

Calculs :

$f_1=20/200=0{,}10$; $f_2=40/200=0{,}20$; $f_3=60/200=0{,}30$; $f_4=50/200=0{,}25$;

f_5=30/200=0,15.

2. Proportion de carcasses pesant moins de 350 kg

$$F(350) = 0{,}60$$

Soit 60 % des carcasses pèsent moins de 350 kg.

3. Proportion de carcasses pesant moins de 370 kg (interpolation linéaire)

370 kg se trouve dans la classe [350 – 400[.

On sait que $F(350)=0{,}60$ et $F(400)=0{,}85$.

$$F(370) = F(350) + \frac{370 - 350}{400 - 350} \times \big(F(400) - F(350)\big)$$

$$F(370) = 0{,}60 + \frac{20}{50} \times (0{,}85 - 0{,}60) = 0{,}60 + 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}60 + 0{,}10 = 0{,}70$$

Soit 70 % des carcasses pèsent moins de 370 kg.

4. Proportion de carcasses pesant 400 kg ou plus

$$P(X \geq 400) = 1 - F(400) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

Soit 15 % des carcasses pèsent 400 kg ou plus.

Interprétation zootechnique : La majorité des carcasses (85 %) pèsent moins de 400 kg. La classe modale est [300 – 350[kg. Les carcasses de plus de 400 kg sont minoritaires (15 %) et correspondent probablement à des animaux plus âgés ou de race à viande.

Exercice 13 – Comparaison de deux lots à l'aide des fréquences cumulées

Dans un élevage porcin, on compare le gain de poids quotidien (en g/j) de deux lots de porcelets : le lot A (aliment standard) et le lot B (aliment enrichi). Les données sont les suivantes :

Lot A (100 animaux)

Gain de poids (g/j)	**[500 – 550[**	**[550 – 600[**	**[600 – 650[**	**[650 – 700[**
Effectif	10	30	40	20

Lot B (100 animaux)

Gain de poids (g/j)	**[500 – 550[**	**[550 – 600[**	**[600 – 650[**	**[650 – 700[**
Effectif	5	15	40	40

1. Construire les tableaux de fréquences cumulées pour les deux lots.

2. Quelle proportion d'animaux atteint un gain de poids d'au moins 600 g/j dans chaque lot ?
3. Estimer par interpolation linéaire la proportion d'animaux ayant un gain inférieur à 620 g/j dans chaque lot.
4. Comparer les deux lots et interpréter l'effet de l'aliment enrichi.

Solution EXERCICE 13

1. Tableaux de fréquences cumulées

Lot A

Classe de gain (g/j)	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***
[500 – 550[	10	0,10	10	0,10
[550 – 600[	30	0,30	40	0,40
[600 – 650[	40	0,40	80	0,80
[650 – 700[	20	0,20	100	1,00
Total	**100**	**1,00**		

Lot B

Classe de gain (g/j)	**Effectif *ni***	**Fréquence *fi***	**Effectif cumulé *Ni***	**Fréquence cumulée *Fi***
[500 – 550[	5	0,05	5	0,05
[550 – 600[	15	0,15	20	0,20
[600 – 650[	40	0,40	60	0,60
[650 – 700[	40	0,40	100	1,00
Total	**100**	**1,00**		

2. Proportion d'animaux atteignant un gain d'au moins 600 g/j

Pour le lot A :

$$P(X \geq 600) = 1 - F(600) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$$

Soit 60 % des animaux du lot A ont un gain ≥ 600 g/j.

Pour le lot B :

$$P(X \geq 600) = 1 - F(600) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$$

Soit 80 % des animaux du lot B ont un gain ≥ 600 g/j.

3. Proportion d'animaux ayant un gain inférieur à 620 g/j (interpolation linéaire)

620 g/j se trouve dans la classe [600 – 650[.

Pour le lot A : $F(600) = 0{,}40 \; et \; F(650) = 0{,}80$.

$$F_A(620) = 0{,}40 + 650 - 600620 - 600 \times (0{,}80 - 0{,}40) = 0{,}40 + 5020 \times 0{,}40$$

$$F_A(620) = 0{,}40 + 0{,}4 \times 0{,}40 = 0{,}40 + 0{,}16 = 0{,}56$$

Soit 56 % des animaux du lot A ont un gain inférieur à 620 g/j.

Pour le lot B :

$$F(600) = 0{,}20 \; et \; F(650) = 0{,}60$$

$$F_B(620) = 0{,}20 + 650 - 600620 - 600 \times (0{,}60 - 0{,}20) = 0{,}20 + 0{,}4 \times 0{,}40$$

$$F_B(620) = 0{,}20 + 0{,}16 = 0{,}36$$

Soit 36 % des animaux du lot B ont un gain inférieur à 620 g/j.

4. Comparaison et interprétation

- Le lot B (aliment enrichi) présente une distribution des gains de poids nettement supérieure : 80 % de ses animaux atteignent au moins 600 g/j, contre 60 % pour le lot A.
- La proportion d'animaux ayant un gain inférieur à 620 g/j est plus faible dans le lot B (36 %) que dans le lot A (56 %).
- La fonction de répartition du lot B est décalée vers la droite par rapport à celle du lot A, ce qui indique un effet positif de l'aliment enrichi sur la croissance.
- En conclusion, l'aliment enrichi améliore significativement le gain de poids quotidien des porcelets. Une analyse plus poussée (test statistique) pourrait confirmer si cette différence est significative.
-