

Chapitre II

Rappels sur les composantes symétriques et les courants de défauts

II.1. Introduction

Les réseaux électriques sont conçus pour assurer une alimentation continue et fiable, mais ils restent exposés à divers incidents de fonctionnement. Parmi ces incidents, les courts-circuits représentent les défauts les plus fréquents et les plus critiques. Ils se produisent lorsque des conducteurs entrent accidentellement en contact entre eux ou avec la terre, générant des courants de forte intensité. Ces défauts peuvent être causés par la foudre, des conditions atmosphériques défavorables, la détérioration de l'isolation des équipements ou des erreurs de manœuvre. L'intensité du courant de court-circuit dépend principalement de l'impédance du réseau au point de défaut. Elle peut atteindre des valeurs plusieurs fois supérieures au courant nominal. Ces courants élevés provoquent des contraintes importantes sur les installations électriques. Ils peuvent entraîner des dommages matériels, des coupures d'alimentation et présenter un danger pour la sécurité des personnes.

II.2. Définition des composantes symétriques

Les composantes symétriques constituent une méthode d'analyse utilisée en régime triphasé pour simplifier l'étude des systèmes électriques déséquilibrés. Elles consistent à décomposer un système de grandeurs triphasées quelconques (courants ou tensions) en trois systèmes équilibrés indépendants appelés : **composante directe**, **composante inverse (indirect)** et **composante homopolaire**.

II.3. Transformation des impédances des charges en composantes symétriques

Le calcul des régimes déséquilibrés devient alors assez complexe, les lois traditionnelles des réseaux triphasés ne sont pas applicables. La méthode des composantes symétriques simplifie notablement ce genre de calculs. Elle repose essentiellement sur la propriété suivante : tout système de grandeurs sinusoïdales non équilibrées peut être décomposé en trois systèmes triphasés équilibrés, que l'on appelle les composantes symétriques du système non équilibré.

On emploie la méthode des composantes symétriques, qui consiste à ramener le système réel à la superposition de trois systèmes monophasés indépendants, appelés :

- ❖ Directe (séquence positive) => indice d ou 1
- ❖ Inverse (séquence négative) => indice i ou 2
- ❖ Homopolaire (séquence nulle) => indice h ou 0

Pour chaque système respectivement 1, 2,0 , les tensions U^0, U^1, U^2 , et les courants I^0, I^1, I^2 , et sont liés par les impédances Z^0, Z^1, Z^2 du même système.

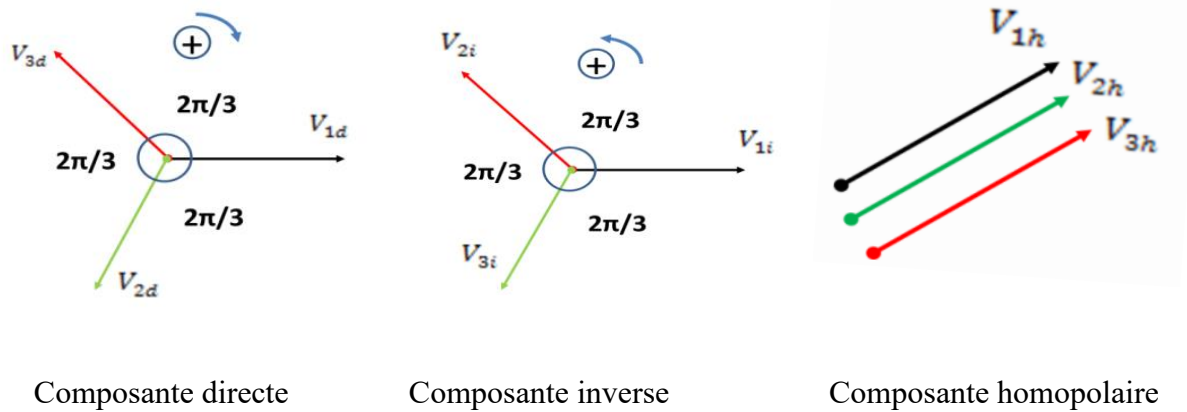


Figure II.1. Représentation des composantes symétriques.

☞ **Opérateur a :**

« a » est un opérateur vectoriel qui consiste à faire tourner de $+ 2\pi/3$ le vecteur auquel l'opération est appliquée

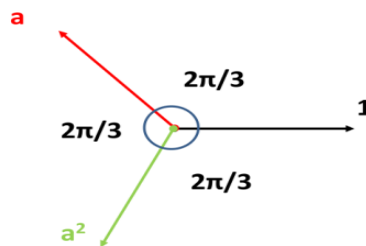


Figure II.2. Opérateur « a ».

$$\begin{cases} a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^3 = e^{j\frac{6\pi}{3}} = 1 \end{cases} \Rightarrow a + a^2 + a^3 = 1 \quad \text{II. 1}$$

II.4. Décomposition d'un système triphasé en composantes symétrique

II.4.1. Composantes symétriques en tension :

Considérons un système triphasé composé de trois grandeurs sinusoïdales de même pulsation, mais de phasages et d'amplitudes quelconques, représentées par les nombres complexes \bar{V}_1 , \bar{V}_2, \bar{V}_3 . Selon le théorème de Fortescue, un tel système peut toujours être décomposé en trois systèmes plus simples :

- Système direct,
- Système inverse,
- Système homopolaire.

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_{1d} + \bar{V}_{1i} + \bar{V}_{1h} \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_{2d} + \bar{V}_{2i} + \bar{V}_{2h} \\ \bar{V}_3 = \bar{V}_{3d} + \bar{V}_{3i} + \bar{V}_{3h} \end{cases} \quad \text{II.2}$$

Posons

$$\bar{V}_{1d} = \bar{V}_d \Rightarrow \begin{matrix} \bar{V}_{1d} = \bar{V}_d \\ \bar{V}_{2d} = a^2 \bar{V}_d \\ \bar{V}_{3d} = a \bar{V}_d \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \bar{V}_{1i} = \bar{V}_i \\ \bar{V}_{2i} = a \bar{V}_i \\ \bar{V}_{3i} = a^2 \bar{V}_i \end{matrix} \quad \text{et} \quad \bar{V}_{1h} = \bar{V}_{2h} = \bar{V}_{3h} = \bar{V}_h \quad \text{II.3}$$

L'équation II.3 s'écrit à nouveau comme suit :

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_h \\ \bar{V}_2 = a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i + \bar{V}_h \\ \bar{V}_3 = a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i + \bar{V}_h \end{cases} = \begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_h + \bar{V}_d + \bar{V}_i \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_h + a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i \\ \bar{V}_3 = \bar{V}_h + a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i \end{cases} \quad \text{II.4}$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_h \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} \quad \text{Avec : } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{II.5}$$

A : est appelée la matrice de transformation des composantes symétriques (matrice de Fortescue).

✓ **Transformation inverse**

$\det(A) = 3a(a - 1) \neq 0$, donc A est inversible, la résolution du système est comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_h \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} \quad \text{II.6}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_h = \frac{1}{3}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3) \\ \bar{V}_d = \frac{1}{3}(\bar{V}_1 + a\bar{V}_2 + a^2\bar{V}_3) \\ \bar{V}_i = \frac{1}{3}(\bar{V}_1 + a^2\bar{V}_2 + a\bar{V}_3) \end{cases} \quad \text{II.7}$$

$\bar{V}_h, \bar{V}_d, \bar{V}_i$ Sont appelée les **composantes symétriques** des vecteurs de tension $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$.

II.4.2. Composantes symétriques en courant :

On peut refaire la même démarche pour décomposer les vecteurs des courants, afin d'obtenir :

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I}_h + \bar{I}_d + \bar{I}_i \\ \bar{I}_2 = \bar{I}_h + a^2\bar{I}_d + a\bar{I}_i \\ \bar{I}_3 = \bar{I}_h + a\bar{I}_d + a^2\bar{I}_i \end{cases} \quad \text{II.8}$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_h \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} \quad \text{II.9}$$

✓ **Transformation inverse :**

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_h \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_h = \frac{1}{3}(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3) \\ \bar{I}_d = \frac{1}{3}(\bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + a^2\bar{I}_3) \\ \bar{I}_i = \frac{1}{3}(\bar{I}_1 + a^2\bar{I}_2 + a\bar{I}_3) \end{cases} \quad \text{II.10}$$

II.4.3. Composantes symétriques des impédances

Soit un système triphasé déséquilibré avec des impédances $\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \\ Z_o \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \\ Z_o \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} \quad \text{II.11}$$

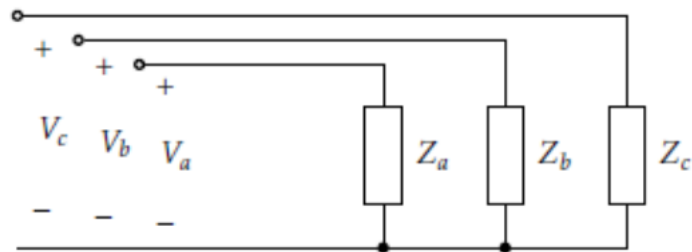
Remarque : Dans une charge triphasée équilibré, $Z_a = Z_b = Z_c = Z$, et alors :

$$Z_d = \frac{1}{3}(1 + a + a^2) Z = 0$$

$$Z_i = \frac{1}{3}(1 + a^2 + a) Z = 0 \quad \text{II.12}$$

$$Z_o = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) Z = Z$$

II.4.4. Loi d'Ohm dans le domaine d-i-o

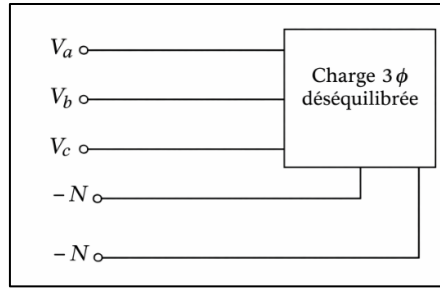


$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \overline{V_{abc}} = [Z_{abc}] \overline{I_{abc}} \quad \text{II.13}$$

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_o & Z_i & Z_d \\ Z_d & Z_o & Z_d \\ Z_d & Z_i & Z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_i \\ I_o \end{bmatrix} \quad \text{II.14}$$

II.4.5. Expression de la puissance apparente en composantes symétriques

Soit une charge triphasée quelconque :



Pour une charge triphasée déséquilibrée, la puissance apparente totale est la somme des puissances apparentes de chaque phase :

$$S_{\text{tot}} = S_a + S_b + S_c \quad \text{II.15}$$

Avec :

$$S_a = V_a I_a^*, S_b = V_b I_b^*, S_c = V_c I_c^* \quad \text{II.16}$$

Donc :

$$\boxed{S_{\text{tot}} = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^*} \quad \text{II.17}$$

La puissance complexe totale sous forme vectorielle (matricielle) comme suit :

$$S = [V_a \ V_b \ V_c] \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_b^* \\ I_c^* \end{bmatrix} \quad \text{II.18}$$

En composantes symétriques, la puissance d'un système triphasé peut être exprimée à partir des composantes directe (1), inverse (2) et homopolaire (0) des tensions et des courants.

On a la décomposition :

$$\{V_a, V_b, V_c\} \rightarrow \{V_0, V_1, V_2\}, \{I_a, I_b, I_c\} \rightarrow \{I_0, I_1, I_2\} \quad \text{II.19}$$

En composantes symétriques

En utilisant la transformation de Fortescue :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{II.20}$$

Avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}, a = e^{j120^\circ} \quad \text{II.21}$$

Alors :

$$S = [V_0 \ V_1 \ V_2] \ 3 \begin{bmatrix} I_0^* \\ I_1^* \\ I_2^* \end{bmatrix} \quad \text{II.22}$$

Puissance complexe totale en composantes symétriques

La puissance complexe totale est :

$$S = P + jQ = 3 (V_0 I_0^* + V_1 I_1^* + V_2 I_2^*)$$

II.23

$$P = \text{Re}(S) \text{ et } Q = \text{Im}(S)$$

Où :

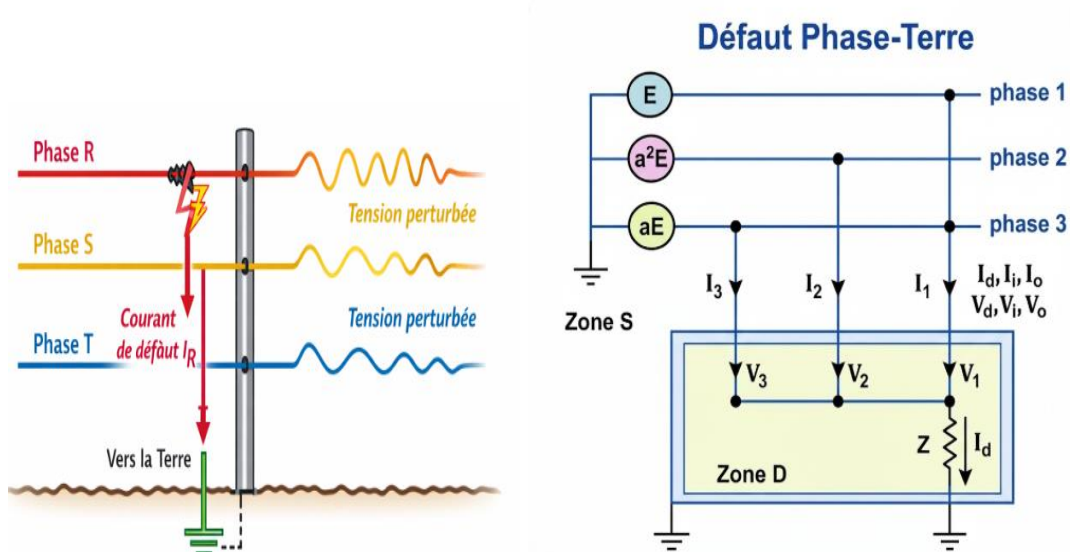
- V_0, V_1, V_2 : composantes de tension (homopolaire, directe, inverse)
- I_0, I_1, I_2 : composantes de courant
- *: conjugué complexe

II.5. Différents défauts électriques

La topologie d'un réseau électrique correspond à la manière dont les lignes, postes et équipements sont interconnectés. Elle varie en fonction du type de réseau (transport, répartition, distribution) et dépend de plusieurs critères techniques et économiques. Le choix de la topologie est guidé principalement par :

II.5.1. Défaut phase-terre (dit défaut homopolaire)

Le défaut phase-terre, également appelé défaut homopolaire, est un type de défaut électrique qui se produit lorsqu'une seule phase d'un réseau électrique entre en contact direct ou indirect avec la terre. C'est le défaut le plus fréquent dans les réseaux de distribution.



1. Cas du circuit non chargé

Pour un circuit triphasé non chargé :

☞ Ecriture des équations dans zone (D)

$$I_2 = I_3 = 0, V_1 = Z \cdot I_1 \quad \text{II.24}$$

2. Composantes symétriques

On exprime les tensions et courants par leurs composantes symétriques (directe, inverse, homopolaire) :

$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_i + I_o \\ I_2 = a^2 I_d + a I_i + I_o \\ I_3 = a I_d + a^2 I_i + I_o \\ V_1 = V_d + V_i + V_o \\ V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_o \\ V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_o \end{cases} \quad \text{II.25}$$

Avec : $a = e^{j120^\circ}$.

3. Équations de fonctionnement pour chaque composante

Pour chaque composante :

$$\begin{cases} E = V_d + Z_d I_d (\text{composante directe}) \\ 0 = V_i + Z_i I_i (\text{composante inverse}) \\ 0 = V_o + Z_o I_o (\text{composante homopolaire}) \end{cases} \quad \text{II.26}$$

En combinant avec les équations globales :

$$E = V_d + V_i + V_o + Z_d I_d + Z_i I_i + Z_o I_o \quad \text{II.27}$$

4. Courants dans chaque composante

En résolvant le système :

$$I_d = I_i = I_o = \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \quad \text{II.28}$$

5. Tensions dans chaque composante

$$\begin{aligned}
 V_d &= E - Z_d I_d = E \cdot \frac{Z_i + Z_o + 3Z}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \\
 V_i &= -Z_i I_i = -E \cdot \frac{Z_i}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \\
 V_o &= -Z_o I_o = -E \cdot \frac{Z_o}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}
 \end{aligned}
 \tag{II.29}$$

6. Courants des phases

$$\begin{cases}
 I_1 = I_d + I_i + I_o = \frac{3E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \\
 I_2 = I_3 = 0
 \end{cases}
 \tag{II.30}$$

7. Tensions des phases

$$\begin{aligned}
 V_1 &= Z \cdot I_1 = \frac{3ZE}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \\
 V_2 &= a^2 V_d + a V_i + V_o = E \frac{Z_i(a^2 - a) + Z_o(a^2 - 1) + 3a^2 Z}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z} \\
 V_3 &= a V_d + a^2 V_i + V_o = E \frac{Z_i(a - a^2) + Z_o(a - 1) + 3aZ}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}
 \end{aligned}
 \tag{II.31}$$

Cas particuliers :

☞ **Défaut franc** : Un défaut franc est un court-circuit direct entre une phase et la terre, sans résistance.

- **Hypothèse** : $Z = 0$ (impédance de défaut nulle).
- **Courant de défaut** :

$$I_1 = \frac{3E}{Z_d + Z_i + Z_o}
 \tag{II.32}$$

Où :

- E : tension de phase à neutre,
- Z_d : impédance de la ligne sur la phase défailante,
- Z_i : impédance interne de la source,
- Z_o : impédance de terre.

☞ Défaut de terre impédant

Un défaut de terre impédant se produit lorsqu'il existe une résistance ou impédance entre la phase et la terre (ex. fuite, défaut partiel).

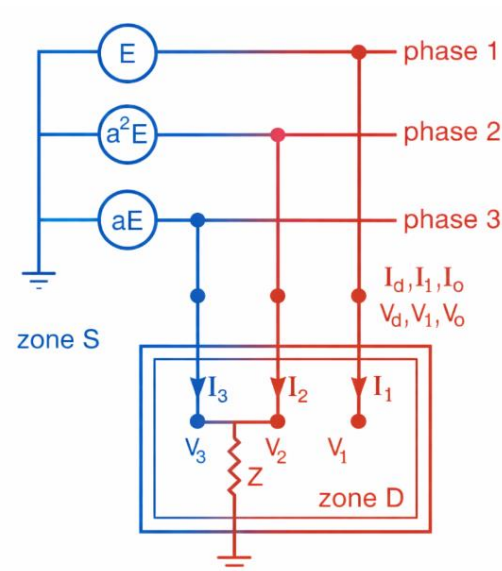
- **Hypothèse** : $3Z \gg Z_d + Z_i + Z_0$ (impédance de défaut très grande comparée aux autres impédances).
- **Courant de défaut** :

$$I_1 = \frac{E}{Z}$$

II.33

Où : Z est l'impédance du défaut.

II.5.2. Défaut biphasé terre



Dans la zone D

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ V_2 = V_3 = Z \cdot (I_2 + I_3) \end{cases}$$

II.34

Dans la zone S

$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_i + I_o \\ I_2 = a^2 I_d + a I_i + I_o \\ I_3 = a I_d + a^2 I_i + I_o \\ V_1 = V_d + V_i + V_o \\ V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_o \\ V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_o \end{cases} \quad \text{II.35}$$

Continuité à la frontière (D) - (S)

$$\begin{cases} 0 = I_d + I_i + I_o \\ V_i = V_d \\ V_o = V_d + 3Z \cdot I_o \end{cases} \quad \text{II.36}$$

Fonctionnement de la zone S

$$\begin{cases} E = V_d + Z_d \cdot I_d \\ 0 = V_i + Z_i \cdot I_i \\ 0 = V_o + Z_o \cdot I_o \end{cases} \quad \text{II.37}$$

✓ **Résolution des équations**

$$I_d = \frac{E}{Z_d + Z_i(Z_o + 3Z)} \cdot \frac{Z_i + (Z_o + 3Z)}{Z_d \cdot Z_i + Z_i(Z_o + 3Z)(Z_d + Z_i)}$$

$$I_i = -E \cdot \frac{Z_o + 3Z}{Z_d \cdot Z_i + (Z_o + 3Z)(Z_d + Z_i)}$$

$$I_o = -E \cdot \frac{Z_i}{Z_d \cdot Z_i + (Z_o + 3Z)(Z_d + Z_i)}$$

$$V_d = V_i = E \cdot \frac{Z_i(Z_o + 3Z)}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)}$$

$$V_o = E \cdot \frac{Z_i \cdot Z_o}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)}$$

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = -j\sqrt{3}E \frac{Z_o + 3Z - aZ_i}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)}$$

$$I_3 = j\sqrt{3}E \frac{Z_o + 3Z - a^2Z_i}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)}$$

$$V_1 = E \frac{3Z_i(Z_o + 2Z)}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)}$$

$$V_2 = V_3 = -E \frac{3Z_i Z}{Z_d \cdot Z_i + (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z)} \quad \text{II.38}$$

II.38

Cas particuliers :

☞ **Défaut franc :** le point de défaut est en court-circuit parfait vers la terre (impédance nulle $Z = 0$). Pour un défaut sur une phase (disons phase 1) :

$$I_{\text{defaut}} = I_2 + I_3$$

Où :

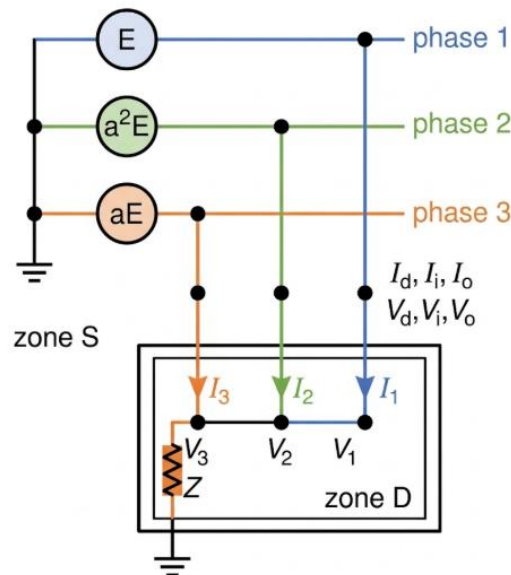
- I_2 = courant de la séquence inverse
- I_3 = courant de la séquence homopolaire

Donc :

$$I_2 + I_3 = - \frac{3E \cdot Z_i}{(Z_d \cdot Z_i) + (Z_o + Z_i)(Z_d + Z_o)}$$

II.39

II.5.3. Défaut triphasé



Équations de la Zone (S)

$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_i + I_o \\ I_2 = a^2 I_d + a I_i + I_o \\ I_3 = a I_d + a^2 I_i + I_o \end{cases}, \begin{cases} V_1 = V_d + V_i + V_o \\ V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_o \\ V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_o \end{cases}$$

II.40

- $I_d, V_d \rightarrow$ composante directe (positive sequence)
- $I_i, V_i \rightarrow$ composante inverse (negative sequence)
- $I_o, V_o \rightarrow$ composante homopolaire (zero sequence)
- $a = e^{j2\pi/3}$

C'est la **décomposition de Fortescue**, classique pour analyser les défauts.

Continuité à la frontière (D) – (S)

$$I_1 + I_2 + I_3 = 3I_o = \frac{V}{Z_o} \quad \text{II.41}$$

Les tensions directes et inverses à la frontière sont nulles :

$$V_d = V_i = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3 = V_o \quad \text{II.42}$$

Fonctionnement de la zone (S)

$$\begin{cases} E = V_d + Z_d \cdot I_d \\ 0 = V_i + Z_i \cdot I_i \\ 0 = V_o + Z_o \cdot I_o \end{cases} \quad \text{II.43}$$

$$I_d = \frac{E}{Z_d}, I_i = 0, I_o = 0 \quad \text{II.44}$$

$$V_d = V_i = V_o = 0 \quad \text{II.45}$$

Résolution des courants et tensions dans les phases

En remplaçant I_d dans les équations des phases :

$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_i + I_o = \frac{E}{Z_d} + 0 + 0 = \frac{E}{Z_d} \\ I_2 = a^2 I_d + a I_i + I_o = a^2 \frac{E}{Z_d} + 0 + 0 = a^2 \frac{E}{Z_d} \\ I_3 = a I_d + a^2 I_i + I_o = a \frac{E}{Z_d} + 0 + 0 = a \frac{E}{Z_d} \end{cases} \quad \text{II.46}$$

Et pour les tensions :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_d + V_i + V_o = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{II.47}$$