



3. Régime permanent varié

Les notions d'énergie spécifique et celle de régime critique, qui en découle, sont essentielles dans l'étude des écoulements à surface libre. En effet, elles permettent de classer les différents types d'écoulement, et de prédéterminer l'allure de la ligne d'eau. Dans un premier temps, on étudiera l'énergie spécifique dans une section puis nous verrons comment elle évolue le long d'un courant.

Les objectifs de ce chapitre sont :

1. Définir l'énergie spécifique et connaître comment elle varie en fonction de la profondeur, de la vitesse et du débit.
2. Comprendre le concept de profondeurs conjuguées avec l'énergie spécifique et dériver les conditions d'écoulement critique ;
3. Calculer la profondeur critique.

3.1 Énergie spécifique

L'énergie spécifique, E_s , est la charge moyenne ramenée au fond du canal est exprimée selon *Bakhmeteff*, (1932) comme suit :

$$E_s = \alpha \frac{Q^2 / A^2}{2g} + y = \alpha \frac{V^2}{2g} + y \quad (3.1)$$

Pour mieux comprendre les processus d'écoulement impliqués, nous considérons les deux situations suivantes :

3.1.1 Courbe de l'énergie spécifique

Quand l'écoulement est stationnaire dans un canal ouvert, le débit est constant et le graphique E_s en fonction de y est donné dans la figure 3.1. À partir de cette figure, nous observons que :

- La distance d'un point sur l'axe vertical y à la courbe représente l'énergie spécifique pour cette valeur de y . La zone entre la ligne $E_s = y$ et la courbe correspond à la charge dynamique (associée à l'énergie cinétique) du liquide et de la partie restante à la pression relative (associée à l'énergie potentielle),
- Si $y \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$, donc $E_s \rightarrow \infty$ ($y = 0$ est une asymptote),

- Si $y \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$, donc $E_s \rightarrow y \rightarrow \infty$,
- Aussi, si $y \rightarrow \infty$, $E_s/y \rightarrow 1$ ($E_s = y$ est une asymptote),
- L'énergie spécifique atteint une valeur minimale E_{sc} à un point intermédiaire appelé point critique caractérisé par la profondeur critique y_c et la vitesse critique V_c . Le minimum de l'énergie spécifique est aussi appelé énergie spécifique critique,
- Pour $E_s < E_{sc}$: impossible d'évacuer le débit Q ,
- Une valeur fixée de y (ligne horizontale) correspond à une seule valeur fixée de E_s ,
- Une valeur fixée de $E_s > E_{sc}$ (ligne verticale) correspond à deux valeurs de y (profondeurs conjuguées avec l'énergie spécifique). Une correspond au régime fluvial et l'autre au régime torrentiel.

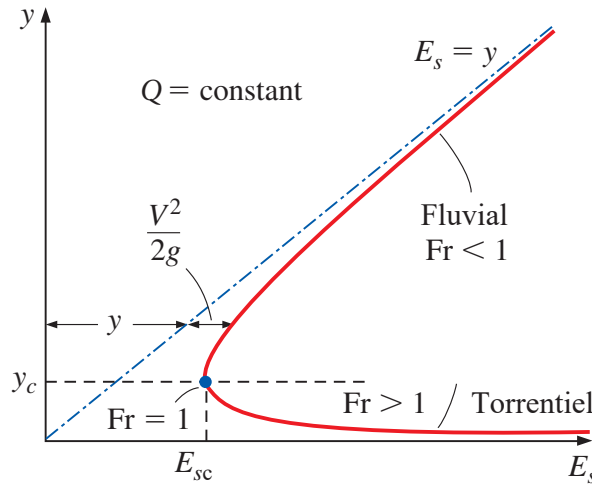


FIGURE 3.1 – Courbe d'énergie spécifique $E_s = f(y)$, pour $Q = \text{Cte}$.

En dérivant E_s de l'équation (3.1) par rapport y pour Q constant on obtient :

$$\frac{dE_s}{dy} = \alpha \frac{-Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} + 1 \quad (3.2)$$

Du fait que : $dA/dy = T$ et $D = A/T$, l'éq. (3.2) devient :

$$\frac{dE_s}{dy} = 1 - \alpha \frac{Q^2}{g} \frac{T}{A^3} = 1 - \alpha \frac{V^2}{gD} = 1 - Fr^2 \quad (3.3)$$

E_s est minimale et est égale à E_{sc} pour $dE_s/dy = 0$ c'est à dire lorsque $Fr = 1$: c'est le régime critique.

$$E_{sc} = \alpha \frac{Q^2/A_c^2}{2g} + y_c = \alpha \frac{V_c^2}{2g} + y_c \quad (3.4)$$

Il s'en suit que pour $E_s < E_{sc}$, le débit Q est écoulé sous deux régimes possibles :

- Fluvial correspondant à $y > y_c$ et $Fr < 1$ et caractérisé par potentiel (y) élevé et cinétique (V) faible (partie supérieure de la courbe de la figure 3.1),
- Torrentiel correspondant à $y < y_c$ et $Fr > 1$ et caractérisé par potentiel (y) faible et cinétique (V) élevée (partie inférieure de la courbe).

Au régime critique :

$$\frac{dE_s}{dy} = 0 \Rightarrow \alpha \frac{V_c^2}{gD_c} = 1 \Rightarrow D_c = \alpha \frac{V_c^2}{g}$$

On en déduit donc :

$$E_{sc} = y_c + \frac{D_c}{2} \quad (3.5)$$

Ce qui donne pour :

$$\text{Un canal rectangulaire : } D_c = y_c \text{ et } E_{sc} = \frac{3}{2}y_c \quad (3.6)$$

$$\text{Un canal triangulaire : } D_c = \frac{y_c}{2} \text{ et } E_{sc} = \frac{5}{4}y_c \quad (3.7)$$

3.1.2 Courbe de débit

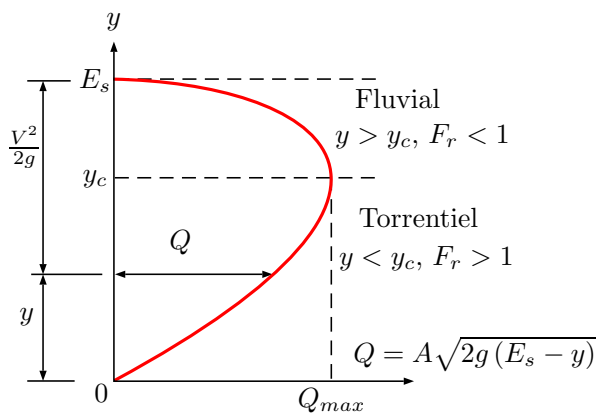


FIGURE 3.2 – Courbe des débits, $Q = f(y)$, pour $E_s = \text{Cte}$.

Pour une charge spécifique, E_s , fixée :

$$(3.1) \Rightarrow Q = A \sqrt{\frac{2g(E_s - y)}{\alpha}} \quad (3.8)$$

À partir de la courbe $Q(y)$ de la figure 3.2, nous observons que :

- Le graphe est parabolique et admet un maximum pour $y = y_c$,
- Pour $y = 0$, $A = 0$, $Q = 0$,
- Pour $y = E_s$, $Q = 0$,
- Le débit est maximal lorsque le régime est critique,
- Pour $Q > Q_{max}$: impossible de faire transiter ce débit avec l'énergie spécifique E_s considérée.

3.2 Calcul de la profondeur critique

La profondeur critique d'un canal est la profondeur d'eau à laquelle :

- l'énergie spécifique est minimale pour un débit donné (voir Fig. 3.1),
- le débit est maximal pour une énergie spécifique donnée (voir Fig. 3.2)

On observe la profondeur critique, par exemple,

- quand il y a passage d'un écoulement fluvial à un écoulement torrentiel, l'écoulement passe par la profondeur critique (Fig. 3.3a).
- dans la section rétrécie (col) d'un canal *Venturi* (Fig. 3.3b),
- elle s'installe aussi s'il existe une chute brusque en aval d'un écoulement fluvial (Fig. 3.3c),
- lors du franchissement de la crête d'un déversoir épais à crête horizontale débite librement dans l'atmosphère (Fig. 3.3d).

Le calcul de la profondeur critique devient important, surtout lors de la détermination des conditions aux limites utilisées dans le calcul des écoulements graduellement varié.

La profondeur critique, y_c , peut être calculée par :

1. la résolution de la condition critique, $F_r = 1$, suivante :

$$F_r^2 = 1 \Rightarrow \alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad (3.9)$$

À partir de cette condition on peut trouver les relations représentées dans le tableau 3.1. Les relations obtenues pour les sections trapézoïdales et circulaires peuvent être résolues de manière itérative.

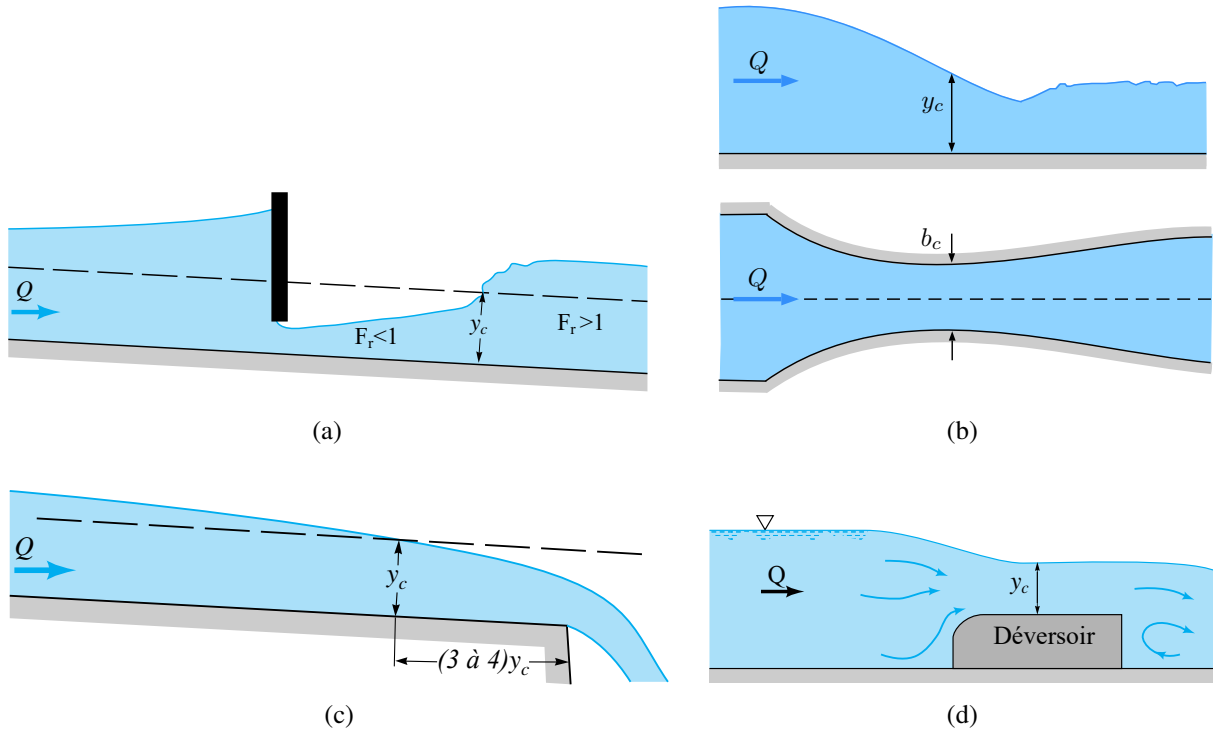


FIGURE 3.3 – Quelques exemple d'apparition de la profondeur critiques.

2. l'utilisation des relations empiriques (tableau 3.1) pour les sections circulaires et trapézoïdales,
3. l'utilisation des graphes pour les sections trapézoïdales (Fig. 3.4) et circulaires (Fig. 3.5).

3.3 Pente critique

La pente critique S_c est la pente pour laquelle un débit donné Q s'écoule en régime uniforme à la profondeur normale critique ($y_n = y_c$). On ne dimensionne jamais un canal avec une pente critique. Le comportement de la ligne d'eau y serait imprévisible. Lors de calcul, deux situations s'apparient :

1. Si l'on cherche la pente critique S_c et que le débit Q est connu, on résout la condition critique donnée par l'éq. (3.9) pour obtenir y_c et l'on déduit, de l'équation de *Manning-Strickler*, la pente critique :

$$S_c = \left(\frac{nQ}{A_c R_{hc}^{2/3}} \right)^2 \quad (3.16)$$

2. Si l'on cherche le tirant critique y_c et que la pente critique S_c est connue, la résolution itérative de l'équation suivante fournit la solution :

$$S_c = \frac{gn^2 A_c}{\alpha T R_{hc}^{4/3}} \quad (3.17)$$

TABLEAU 3.1 – Relations analytiques et empiriques pour le calcul de la profondeur critique, y_c .

Canal	Éq.	Relation de y_c	
Rectangulaire	(3.9)⇒	$y_c = \left(\alpha \frac{Q^2}{b^2 g} \right)^{1/3}$	(3.10)
Triangulaire	(3.9)⇒	$y_c = \left(\frac{2\alpha Q^2}{gm^2} \right)^{1/5}$	(3.11)
	(3.9)⇒	$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{y_c^3 (b + my_c)^3}{(b + 2my_c)}$	(3.12)
Trapézoïdal		$\varepsilon_c = 4 \left(\frac{\alpha m^3 Q^2}{gb^5} \right)^{1/3}$	(3.13a)
		$t_{c0} = 1 + 1,161\varepsilon_c (1 + 0,666\varepsilon_c^{1,041})^{0,374}$	(3.13b)
	de Vatankhah (2013)	$\eta_c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{5t_{c0}^{0,864} + 1}{6t_{c0}^{0,720} - \varepsilon_c} \right)^3$	(3.13c)
		$y_c \approx \eta_c \frac{b}{m}$	(3.13d)
	(3.9)⇒	$\frac{512\alpha Q^2}{gd_0^5} = \frac{(\pi\theta_c/90 - \sin 2\theta_c)^3}{\sin \theta_c}$	(3.14a)
		$\theta_c = 180 - \arccos \left(\frac{2y_c}{d_0} - 1 \right), \quad \theta_c \text{ en } ^\circ$	(3.14b)
Circulaire			
	de Straub (1978)	$y_c = \frac{1,01}{d_0^{0,265}} \left(\alpha \frac{Q^2}{g} \right)^{0,253}$	(3.15)

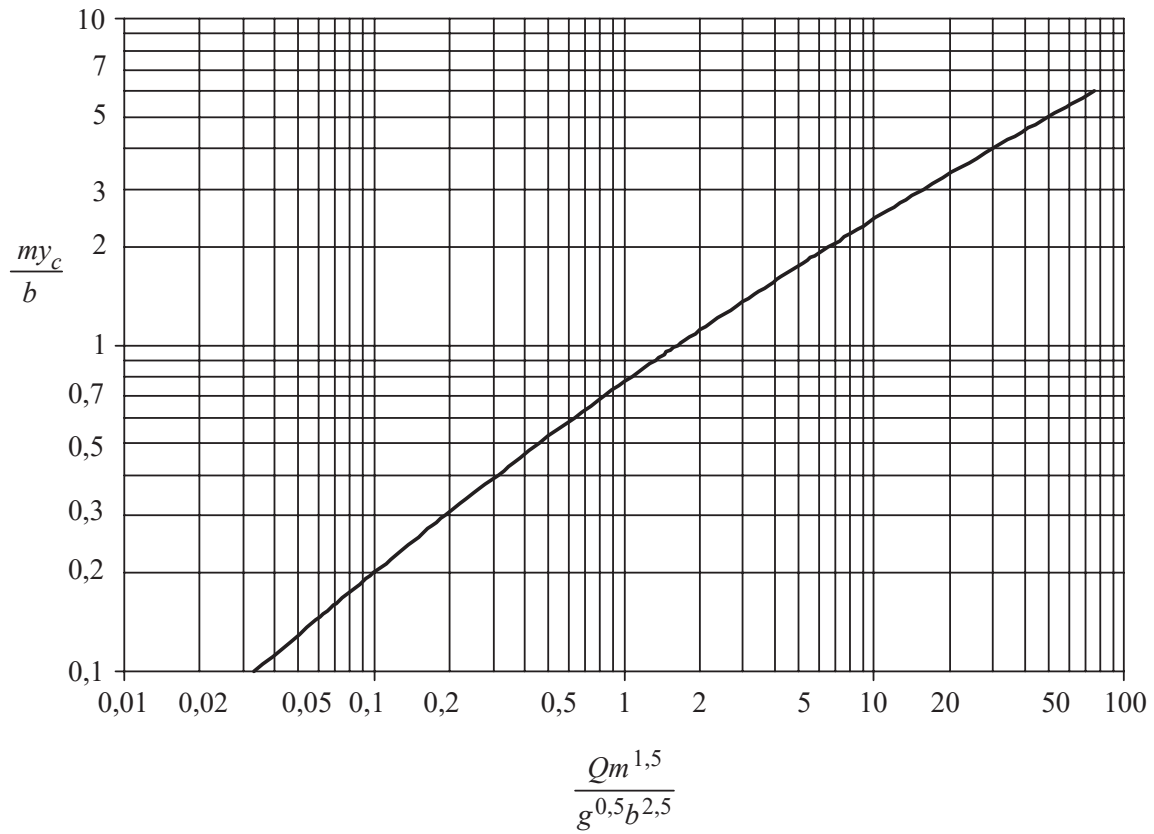


FIGURE 3.4 – Détermination de la profondeur critique des canaux de section trapézoïdale.

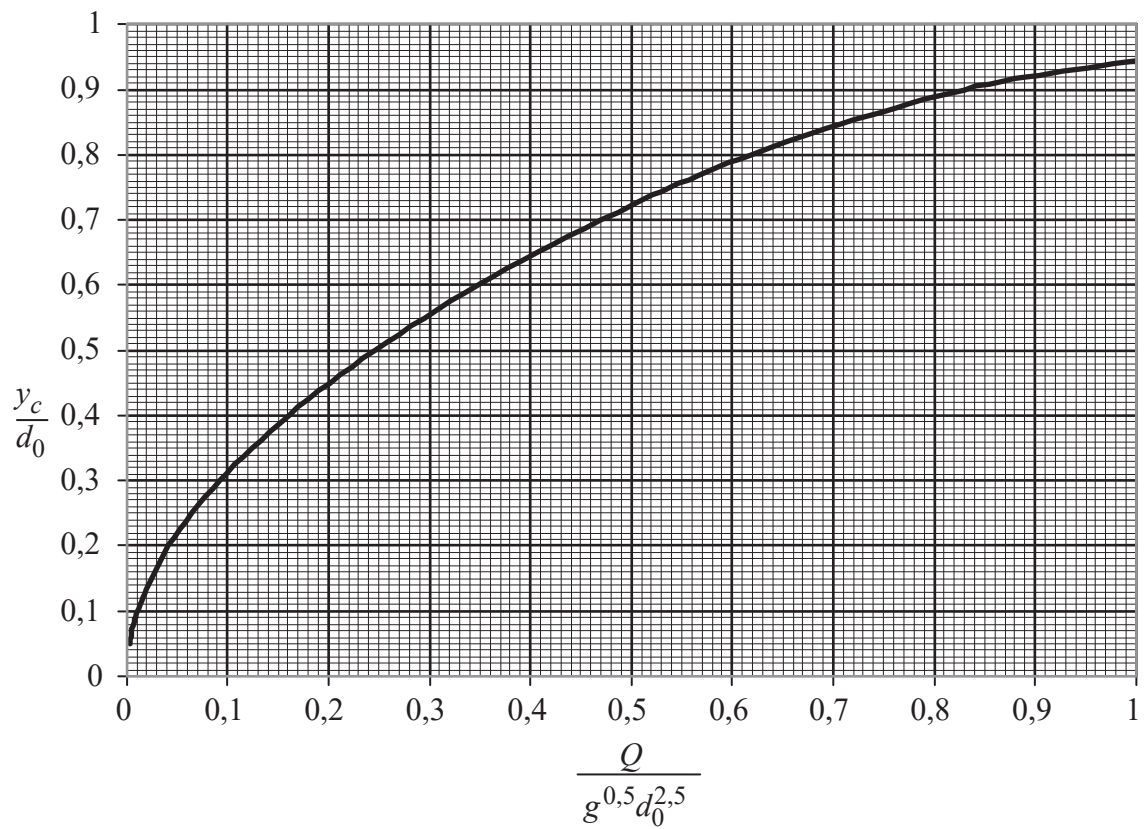


FIGURE 3.5 – Détermination de la profondeur critique des canaux de section circulaire.