

Exercice N°01 :

1. On considère un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3 s(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 3 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 2 \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros

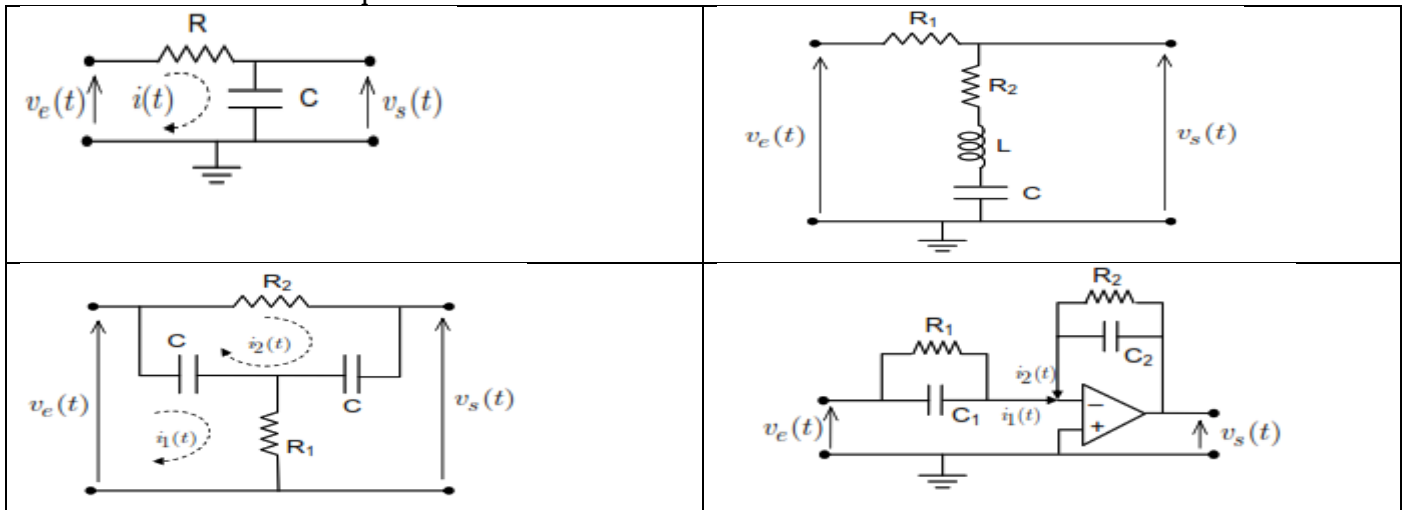
2. On considère un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Calculer la réponse de ce système $s(t)$ à une entrée $e(t)$ en échelon unitaire

Exercice N°02 :

En supposant les conditions initiales nulles (condensateurs déchargés initialement), calculez les fonctions de transfert des circuits électriques suivants :

**Exercice N°03 :**

Une sonde atténuatrice connectée à l'entrée d'un oscilloscope peut être schématisée par le circuit électrique ci-contre :

Le condensateur C_1 sert à "adapter la sonde", c'est-à-dire que si à l'entrée de la sonde on envoie un échelon, nous obtiendrons, également, un échelon à sa sortie. Les 2 échelons peuvent ne pas avoir la même amplitude.

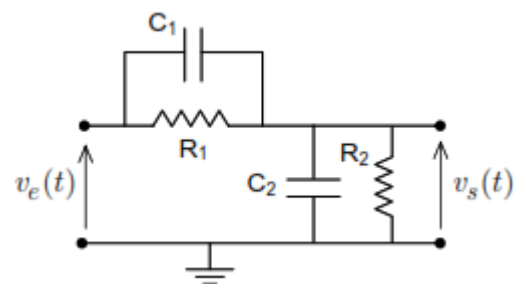
C_2 est le condensateur d'entrée de l'oscilloscope.

Les conditions initiales sont supposées nulles (condensateurs déchargés initialement).

2.a) Débrancher le condensateur C_1 . Calculer la fonction de transfert $G(p)$ entre $V_s(p)$ et $V_e(p)$ puis calculer et tracer $V_s(t)$ lorsque $V_e(t)$ est un échelon unitaire.

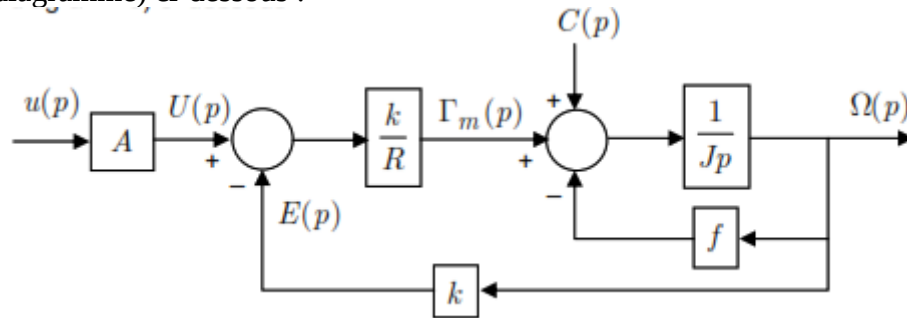
2.b) Rebrancher le condensateur C_1 . Reprendre les calculs de la question a) en donnant les différentes allures de $V_s(t)$ en fonction de $(R_1.C_1)$ et de $(R_2.C_2)$.

2.c) Donner la condition particulière pour laquelle $V_s(t)$ est aussi un échelon.



Exercice N°04 :

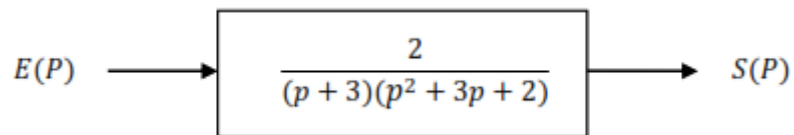
En négligeant les transitoires électriques, un moteur à courant continu peut être représenté par le schéma fonctionnel (bloc diagramme) ci-dessous :



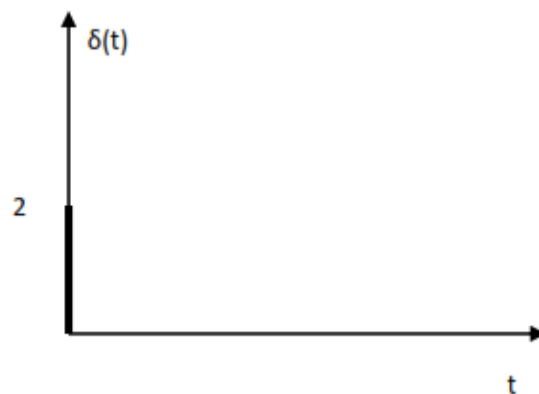
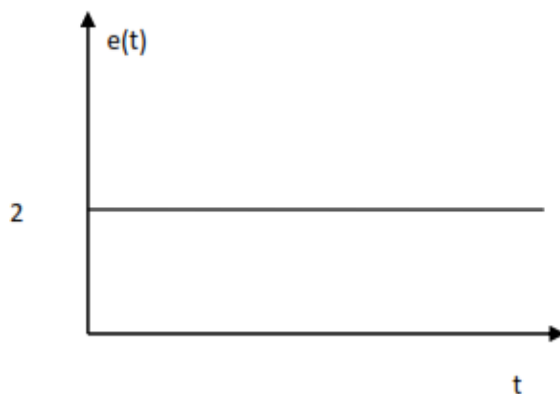
- Calculer la Fonction de Transfert entre $u(p)$ et $\Omega(p)$ en supposant $C(p)=0$.
- Calculer la Fonction de Transfert entre $C(p)$ et $\Omega(p)$ en supposant $u(p)=0$.
- Exprimer $\Omega(p)$ en fonction de $u(p)$ et de $C(p)$.

Exercice N°05 :

On considère un système d'entrée $E(p)$ et de sortie $S(p)$ donné par le schéma bloc suivant :



- Déduire la fonction de transfert du système
- Faire la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert
- Déduire $s(t)$ dans chaque cas, pour les entrées suivantes :



Exercice N°01 :

$$1) \frac{d^3 S(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 S(t)}{dt^2} + 3 \frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 2 \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

$$\Rightarrow L \left[\frac{d^3 S(t)}{dt^3} \right] + 3 L \left[\frac{d^2 S(t)}{dt^2} \right] + 3 L \left[\frac{dS(t)}{dt} \right] + L [S(t)] = 2 L \left[\frac{de(t)}{dt} \right] + L [e(t)]$$

$$\Rightarrow p^3 S(p) + 3 p^2 S(p) + 3 p S(p) + S(p) = 2 p E(p) + E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) [p^3 + 3p^2 + 3p + 1] = (2p + 1) E(p)$$

soit $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$: la fonction de transfert du système

$$\Rightarrow H(p) = \frac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Les zéros de $H(p) \Rightarrow N(p) = 0 \Rightarrow 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$ d'où : $-\frac{1}{2}$ est un zéro simple

Les pôles de $H(p) \Rightarrow D(p) = 0 \Rightarrow p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = 0$

On remarque que -1 est un zéro pour $D(p)$ (pôle pour $H(p)$) d'où

$$D(p) = (p + 1) (ap^2 + bp + c)$$

$ap^3 + bp^2 + cp + ap^2 + bp + c$ par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 3 \\ c + b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où $a = 1, c = 1$ et $b = 2$

$\Rightarrow D(p) = (p + 1) (p^2 + 2p + 1) = (p + 1) (p + 1)^2 = (p + 1)^3$ d'où : -1 est un pôle triple.

$$2) \frac{d^2 S(t)}{dt^2} + 3 \frac{dS(t)}{dt} + 2S(t) = e(t)$$

$$\Rightarrow L \left[\frac{d^2 S(t)}{dt^2} \right] + 3 L \left[\frac{dS(t)}{dt} \right] + 2 L [S(t)] = L [e(t)]$$

On a : $e(t) = U(t) \Rightarrow L [e(t)] = \frac{1}{p}$

$$D'où p^2 S(p) + 3 pS(p) + 2 S(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = [p^2 + 3p + 2] = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{1}{p(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p(p+2)(p+1)}$$

Décomposition des S(p) en éléments simple

$$\Rightarrow S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+2} + \frac{\delta}{p+1}$$

$$\text{Avec } \alpha = pS(P)/_{p=0} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = (p+2)S(P)/_{p=-2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\delta = (p+1)S(P)/_{p=-1} \Rightarrow \delta = -1$$

$$\Rightarrow S(P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+2} - 1 \cdot \frac{1}{p+1}$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{1}{2} U(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} U(t) - e^{-t} U(t)$$

$$\Rightarrow S(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} \right] U(t)$$

EXERCIE N°02

1.a) On a :

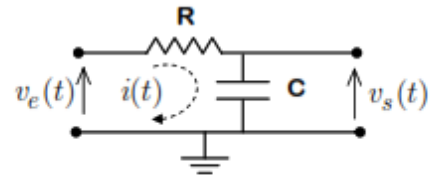
➤ 1^{ère} méthode : A partir des équations électriques temporelles :

Les équations électriques du circuit sont :

$$\begin{cases} v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t).dt & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne : $i(t) = C \cdot \frac{dv_s(t)}{dt}$



En remplaçant cette valeur de courant dans (2), nous obtenons : $v_e(t) = RC \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$ (3)

(3) est l'équation différentielle qui décrit la relation entre l'entrée et la sortie du système.

Si nous passons du domaine temporelle au domaine de Laplace, alors (3) devient :

$$V_e(p) = RC[pV_s(p) - v_s(0)] + V_s(p) \quad (4)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} V_e(p) = \mathcal{L}[v_e(t)] \\ V_s(p) = \mathcal{L}[v_s(t)] \end{cases}$$

$v_s(0)$ est la tension au borne du condensateur à l'instant $t=0$. Elle dépend de la charge initiale q_0 et de

capacité C du condensateur : $v_s(0) = \frac{q_0}{C}$ (5)

De (4) et (5) : $V_s(p) = \frac{V_e(p) + RCv_s(0)}{1 + RCp}$ (6)

Si le condensateur n'est pas chargé initialement (conditions initiales nulles), (6) devient : $V_s(p) = \frac{V_e(p)}{1 + RCp}$

La fonction de transfert du système est alors : $\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$

Ce circuit électrique se comporte donc comme un système de 1^{er} Ordre $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + T.p}$ de gain $K=1$ et de constante de temps $T=RC$.

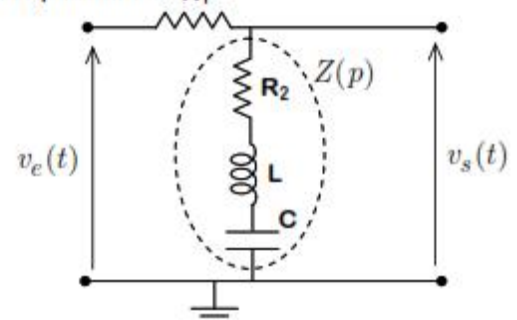
1.b) On a :

$$\begin{cases} V_e(p) = \mathcal{L}[v_e(t)] \\ V_s(p) = \mathcal{L}[v_s(t)] \end{cases}$$

Les conditions initiales sont supposées nulles (condensateurs déchargés). Le circuit électrique est un diviseur de tension : Le rapport des tensions est égal au rapport des impédances.

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{Z(p)}{R_1 + Z(p)} = \frac{R_2 + Lp + \frac{1}{Cp}}{R_1 + R_2 + Lp + \frac{1}{Cp}}$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1 + R_2 Cp + LCp^2}{1 + (R_1 + R_2) Cp + LCp^2}$$

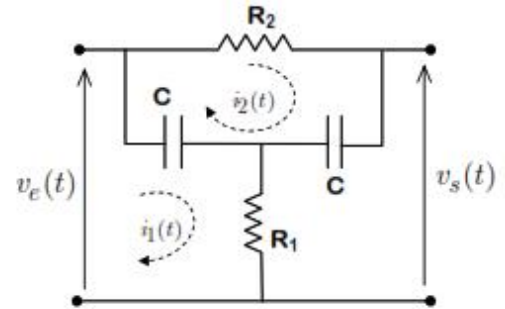


1.c) On a :

$$\begin{cases} I_1(p) = \mathcal{L}[i_1(t)] & V_e(p) = \mathcal{L}[v_e(t)] \\ I_2(p) = \mathcal{L}[i_2(t)] & V_s(p) = \mathcal{L}[v_s(t)] \end{cases}$$

La loi des mailles donne le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} V_e(p) = \left(R_1 + \frac{1}{Cp}\right) I_1(p) - \frac{1}{Cp} I_2(p) & \text{boucle I} \\ 0 = -\frac{1}{Cp} I_1(p) + \left(R_2 + \frac{2}{Cp}\right) I_2(p) & \text{boucle II} \end{cases}$$



En déterminant $I_2(p)$ à partir de ce système et en le remplaçant dans : $V_s(p) = V_e(p) - R_2 I_2(p)$

on trouve :

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1 + 2R_1 Cp + R_1 R_2 C^2 p^2}{1 + (2R_1 + R_2) Cp + R_1 R_2 C^2 p^2}$$

1.d) On a :

$$\begin{cases} V_e(p) = \mathcal{L}[v_e(t)] & V_s(p) = \mathcal{L}[v_s(t)] \end{cases}$$

Les conditions initiales sont supposées nulles (condensateurs déchargés). Le circuit électrique est un montage avec amplificateur inverseur.

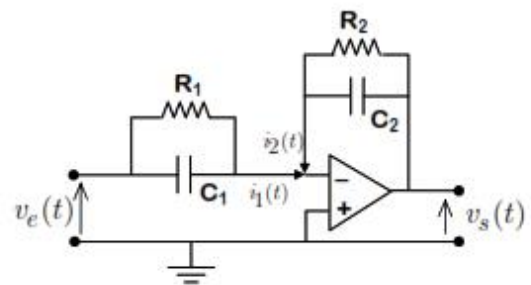
L'impédance d'entrée de l'amplificateur tend vers l'infini : son courant d'entrée tend vers zéro.

Donc : $i_1(t) + i_2(t) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_e(t)}{R_1} + C_1 \frac{dv_e(t)}{dt} \right) + \left(\frac{v_s(t)}{R_2} + C_2 \frac{dv_s(t)}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V_e(p) \left(\frac{1}{R_1} + C_1 p \right) + V_s(p) \left(\frac{1}{R_2} + C_2 p \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{-R_2}{R_1} \frac{1 + R_1 C_1 p}{1 + R_2 C_2 p}$$



On peut trouver ce résultat en remarquant que :

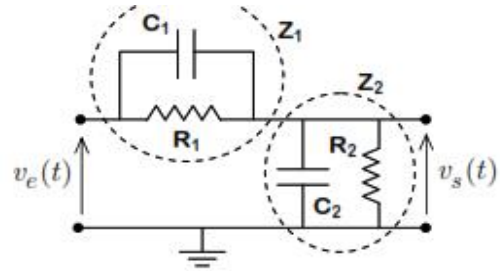
$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{Z_1}(p) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1/C_1 p} \\ \frac{1}{Z_2}(p) = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{1/C_2 p} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} Z_1(p) &= \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 p} \\ Z_2(p) &= \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 p} \end{aligned}$$

EXERCICE N°03

Exercice n°2

Le circuit électrique est un diviseur de tension : Le rapport des tensions est égal au rapport des impédances :

$$G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$



2.a) Sans branchement du condensateur C_1 .

$$\text{Dans ce cas : } \begin{cases} Z_1(p) = R_1 \\ \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{1/C_2 p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1(p) = R_1 \\ Z_2(p) = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1/R_1 C_2}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2}} = \frac{K}{p + a} \quad \text{avec } \begin{cases} K = 1/R_1 C_2 \\ a = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{cases}$$

$$V_s(p) = V_e(p) \frac{K}{p + a}$$

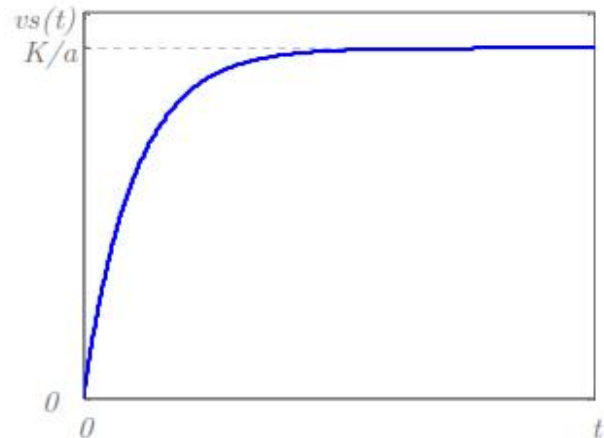
Si l'entrée $V_e(p) = \frac{1}{p}$ (échelon unitaire), alors :

$$V_s(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{p + a} \quad 2 \text{ pôles réels (0 et } -a)$$

$$V_s(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + a}$$

$$\Rightarrow V_s(p) = \frac{K}{a} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + a} \right)$$

$$\Rightarrow v_s(t) = \frac{K}{a} (1 - e^{-at})$$



L'entrée étant un échelon, la sortie n'est pas un échelon. Sans le condensateur C_1 , la sonde n'est pas adaptée.

2.b) Avec branchement du condensateur C_1

$$\text{Dans ce cas : } \begin{cases} \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1/C_1 p} \\ \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{1/C_2 p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1(p) = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 p} \\ Z_2(p) = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{p + 1/R_1 C_1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}} = K \frac{p + a}{p + b}$$

$$\text{avec } \begin{cases} K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \\ a = 1/R_1 C_1 \\ b = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \end{cases}$$

$$V_s(p) = V_e(p) \frac{K(p + a)}{p + b}$$

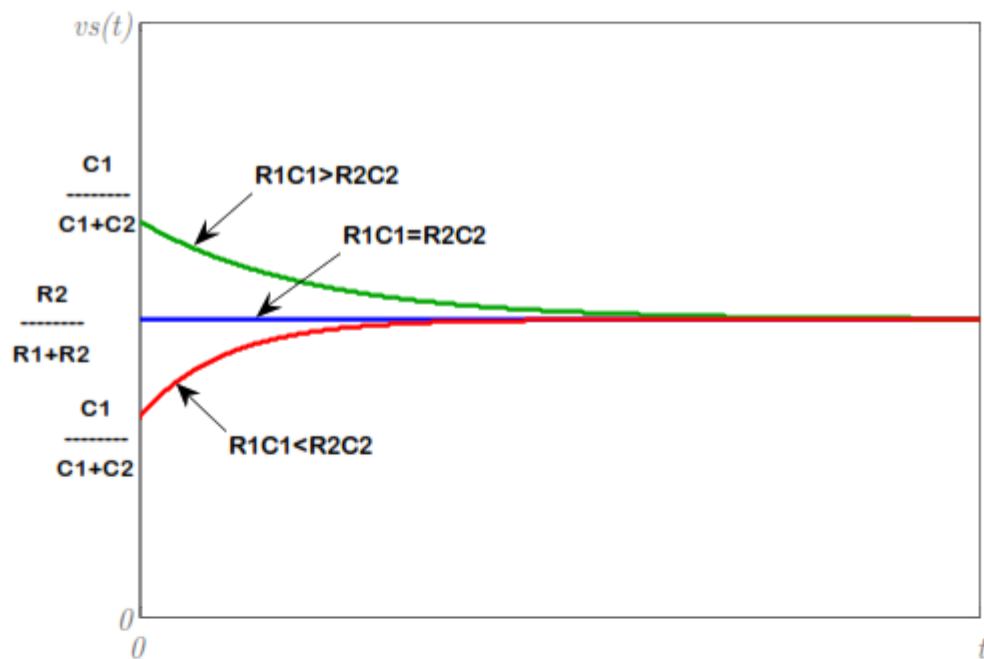
Si l'entrée $V_e(p) = \frac{1}{p}$ (échelon unitaire), alors :

$$V_s(p) = \frac{1}{p} \frac{K(p+a)}{p+b} = K \left(\frac{1}{p} \frac{p+a}{p+b} \right) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p+b} \right) \quad 2 \text{ pôles réels } (0 \text{ et } -b)$$

$$\Rightarrow V_s(p) = K \left(\frac{a}{b} \frac{1}{p} - \frac{b-a}{b} \frac{1}{p+b} \right)$$

$$\Rightarrow v_s(t) = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \right) t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Différentes allures de $v_s(t)$ en fonction de $(R_1.C_1)$ et de $(R_2.C_2)$.



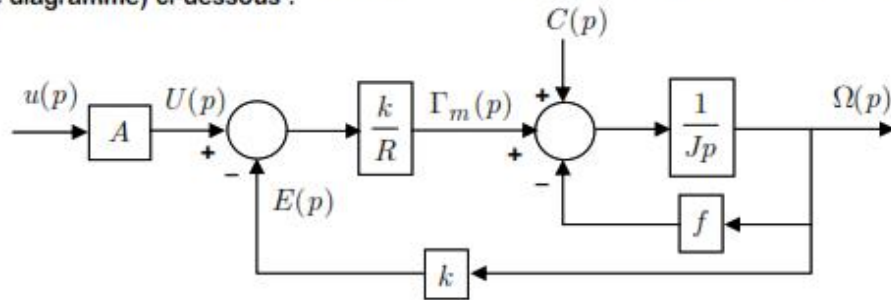
2.c) Condition particulière pour laquelle $v_s(t)$ est aussi un échelon.

La condition d'adaptation de la sonde (entrée échelon et sortie échelon) est qu'il n'y ait pas de terme en exponentielle dans l'expression de $v_s(t)$, c'est à dire $\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 0 \Rightarrow C_1 R_1 = C_2 R_2$

Dans ce cas : $v_s(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, c'est-à-dire un échelon < 1

Exercice N°04 :

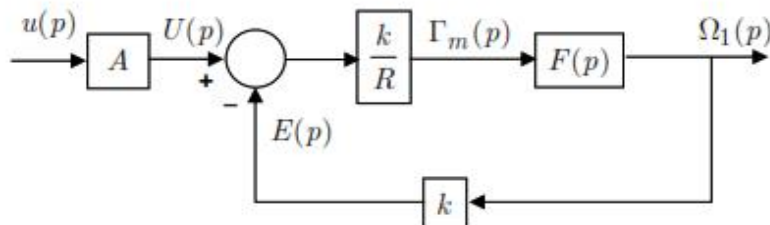
En négligeant les transitoires électriques, un moteur à courant continu peut être représenté par le schéma fonctionnel (bloc diagramme) ci-dessous :



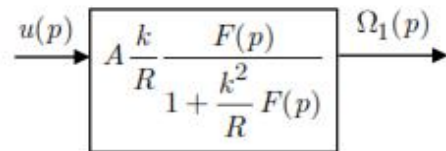
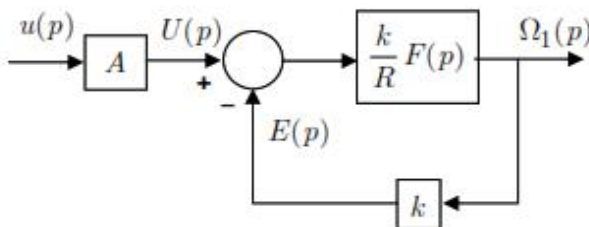
Cet exercice constitue une application du théorème de superposition pour les systèmes linéaires.

- a) Calcul de la Fonction de Transfert $G_1(p)$ entre $u(p)$ et $\Omega(p)$ en supposant $C(p)=0$.

Dans ce cas la sortie vaut $\Omega_1(p)$.



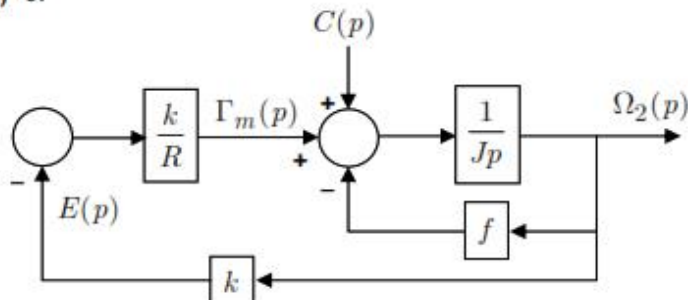
Avec $F(p) = \frac{1}{Jp + f}$

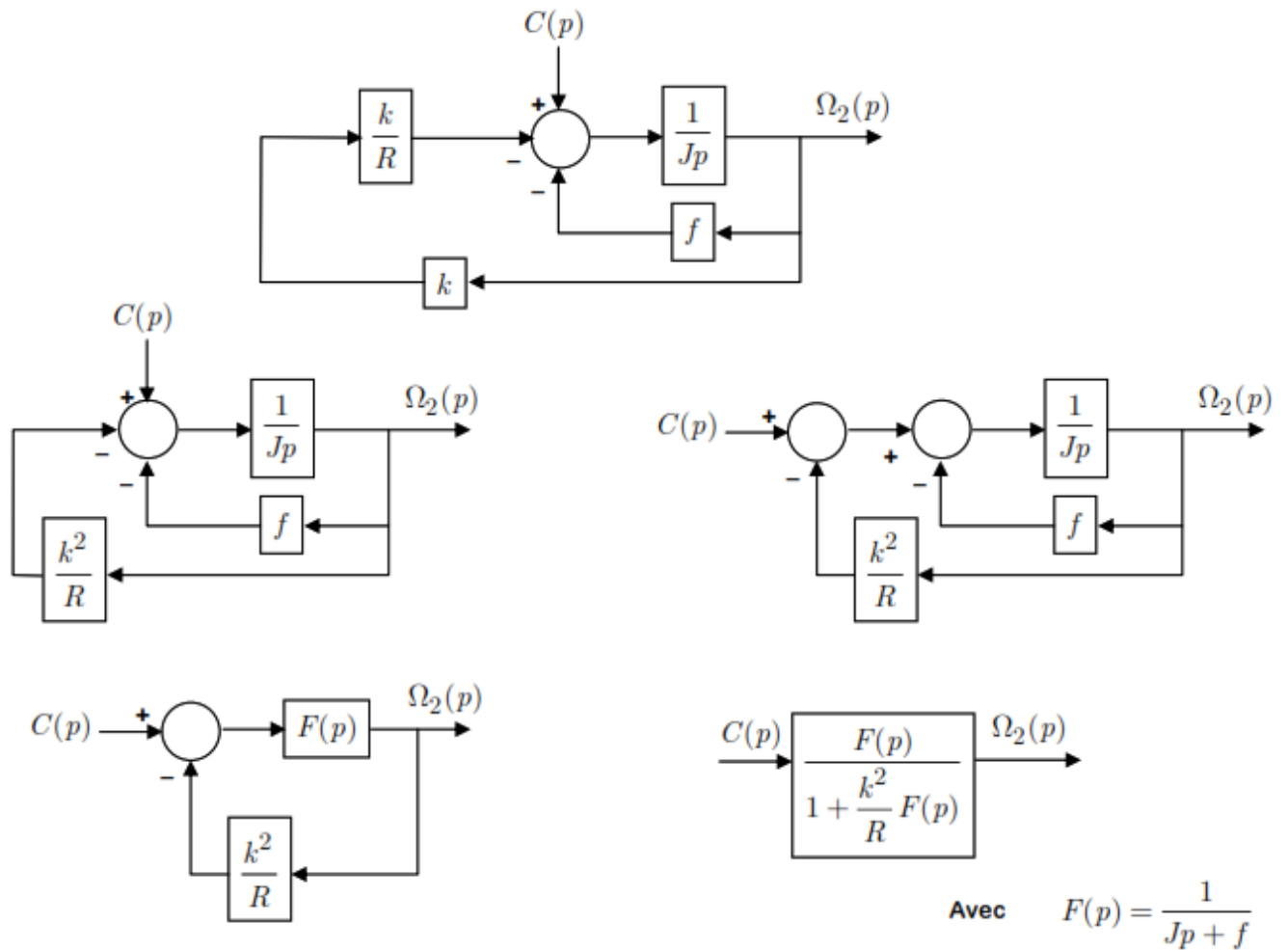


$$G_1(p) = \frac{\Omega_1(p)}{u(p)} = A \frac{k}{R} \frac{F(p)}{1 + \frac{k^2}{R} F(p)}$$

- b) Calcul de la Fonction de Transfert $G_2(p)$ entre $C(p)$ et $\Omega(p)$ en supposant $u(p)=0$.

Dans ce cas, la sortie vaut $\Omega_2(p)$.
L'entrée $u(p)=0$. Donc $U(p)=0$.





$$G_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{C(p)} = \frac{F(p)}{1 + \frac{k^2}{R} F(p)}$$

c) Expression de $\Omega(p)$ en fonction de $u(p)$ et de $C(p)$.

$$\begin{aligned} \Omega(p) &= \Omega_1(p) + \Omega_2(p) = u(p).G_1(p) + C(p).G_2(p) \\ \Rightarrow \Omega(p) &= u(p).A \frac{k}{R} \frac{F(p)}{1 + \frac{k^2}{R} F(p)} + C(p). \frac{F(p)}{1 + \frac{k^2}{R} F(p)} \\ \Rightarrow \Omega(p) &= \left(u(p).A \frac{k}{R} + C(p) \right) \cdot \frac{F(p)}{1 + \frac{k^2}{R} F(p)} \end{aligned}$$

avec $F(p) = \frac{1}{Jp + f}$

EXERCICE N°05

$$1. H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(p+3)(p^2+3p+2)}$$

$$2. H(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1}$$

$$= \frac{a(p+2)(p+1) + b(p+3)(p+1) + c(p+3)(p+2)}{(p+3)(p+2)(p+1)}$$

Par identification on obtient : $a = -1, b = 2, c = -1$

$$H(p) = \frac{-1}{p+3} + \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1}$$

3. **Cas 1** : L'entrée est un échelon

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot \frac{2}{p}$$

$$= \frac{2}{p(p+3)(p+2)(p+1)}$$

$$= \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p}$$

Par identification on obtient :

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = 1, \quad d = -1,$$

$$\text{donc } s(t) = \left[\frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-t} \right] \cdot u(t)$$

Cas 2 : L'entrée est une impulsion

$$S(p) = H(p) * E(p) = H(p) * 2 = \frac{-2}{p+3} + \frac{4}{p+2} + \frac{-2}{p+1}$$

$$s(t) = [-2e^{-3t} + 4e^{-2t} - 2e^{-t}] u(t)$$