

Solution 2.7

a) Pour un canal rectangulaire : $A = by \Rightarrow b = \frac{A}{y}$

$$P_w = b + 2y = \frac{A}{y} + 2y$$

En dérivant P_w par rapport y en considérant A constante,

$$\frac{dP_w}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{y^2} + 2 = -\frac{by}{y^2} + 2 = -\frac{b}{y} + 2 = 0$$

$$\text{donc } \boxed{y = \frac{b}{2}} \text{ et } \boxed{R_h = \frac{y}{2}}.$$

b) Pour un canal trapézoïdale : $A = (b + my)y \Rightarrow b = \frac{A}{y} - my$

$$P_w = b + 2y\sqrt{1 + m^2} = \frac{A}{y} - my + 2y\sqrt{1 + m^2}$$

En dérivant P_w par rapport y en considérant A constante,

$$\frac{dP_w}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{y^2} - m + 2\sqrt{1 + m^2} = -\frac{(b + my)y}{y^2} - m + 2\sqrt{1 + m^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(b + my)}{y} - m + 2\sqrt{1 + m^2} = 0$$

$$\text{donc } b = 2y(\sqrt{1 + m^2} - m),$$

$$A = y^2(2\sqrt{1 + m^2} - m) \text{ et}$$

$$P_w = 2y(2\sqrt{1 + m^2} - m)$$

De même la pente des côtés, m , pour la meilleure section transversale hydraulique est déterminée en prenant la dérivée de P_w par rapport m avec y constant.

$$\frac{dP_w}{dm} = 0 \Rightarrow 2y\left(\frac{2m}{\sqrt{1 + m^2}} - 1\right) = 0$$

En résolvant l'équation, on obtient : $\boxed{m = 1/\sqrt{3}}$. C'est-à-dire que les côtés sont inclinés de 60° .

En substituant $m = 1/\sqrt{3}$ dans les équations de b , P_w et A , on obtient :

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}b}, \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2}, \boxed{P_w = 3b} \text{ et } \boxed{R_h = \frac{y}{2}}$$

$$\text{La longueur du côté de la section d'écoulement} = y\sqrt{1 + m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = b$$

Par conséquent, la meilleure section transversale pour les canaux trapézoïdaux est la moitié d'un hexagone (Fig 2.7c). Ce n'est pas surprenant puisqu'un hexagone ressemble approximativement à un cercle et un demi-hexagone a le plus faible périmètre par unité de surface de section transversale de tous les canaux trapézoïdaux.

d) Pour une section triangulaire : $A = my^2 \Rightarrow y = \sqrt{A/m}$

$$P_w = 2y\sqrt{1 + m^2} = 2\sqrt{A}\sqrt{\frac{1}{m} + m}$$

En dérivant P_w par rapport à m en considérant A constante,

$$\frac{dP_w}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{A}\sqrt{\frac{-1}{m^2} + 1}}{2\sqrt{\frac{1}{m} + m}} = 0$$

donc $m = 1$ (positive). C'est-à-dire que les côtés sont inclinés de 45° ou l'angle d'ouverture du triangle est 90° .
En substituant $m = 1$ dans les équations de A , P_w et R_h , on obtient :

$$A = y^2, \quad P_w = 2\sqrt{2}y \quad \text{et} \quad R_h = \frac{y}{2\sqrt{2}}.$$

■