

Solution 3.4

1.a) Calcul des profondeurs conjuguées avec l'énergie spécifique graphiquement

D'après l'éq. (3.1), l'énergie spécifique pour un canal rectangulaire est (avec $\alpha = 1$) :

$$E_s = \frac{Q^2/A^2}{2g} + y = \frac{Q^2}{2gb^2y^2} + y = \frac{7,72^2}{2 \times 9,81 \times 2,5^2 y^2} + y$$

$$E_s = \frac{0,486}{y^2} + y \quad (\text{S3.4.1})$$

C'est une équation d'un hyperbole. En se servant du tableau S3.4, on a tracé la courbe de l'énergie spécifique de ce canal (Fig. S3.4).

TABLEAU S3.4

y	E_s
0,5	2,444
0,6	1,950
0,7	1,692
0,8	1,559
0,9	1,500
1,0	1,486
1,1	1,502
1,3	1,588
1,5	1,716
1,7	1,868
1,9	2,035

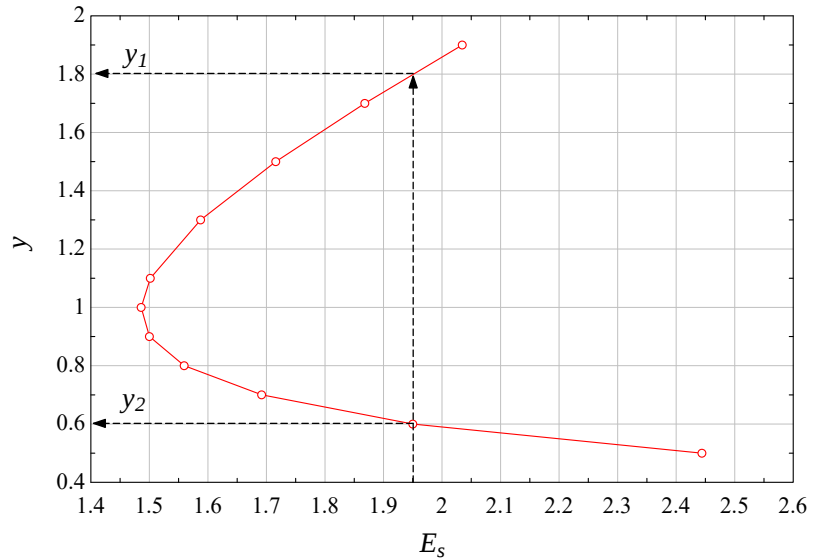


FIGURE S3.4 – Courbe de E_s pour l'exercice 3.4.

À partir de cette courbe, on peut tirer que les deux profondeurs conjuguées avec l'énergie spécifique pour $E_s = 1,95$ m sont :

$$y_1 = 1,8 \text{ m} \text{ et } y_2 = 0,6 \text{ m}.$$

1.b) Calcul des profondeurs conjuguées avec l'énergie spécifique analytiquement

L'éq. (S3.4.1) peut être aussi écrite sous la forme :

$$y^3 - E_s y^2 + 0,486 = y^3 - 1,95 y^2 + 0,486 = 0 \quad (\text{S3.4.2})$$

Suivant la méthodologie décrite dans l'annexe Annexe A et en posant $a = 1$, $b = -1,95$, $c = 0$ et $d = 0,486$ nous obtenons :

$$\eta = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{0 - (-1,95)^2}{3 \times 1^2} = -1,268 < 0, \text{ donc l'équation possède trois racines réelles}$$

$$\xi = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2(-1,95)^3 - 0 + 27 \times 1^2 \times 0,486}{27 \times 1^3} = -0,063$$

$$\lambda = 2\sqrt{-\frac{\eta}{3}} = 2\sqrt{\frac{1,268}{3}} = 1,3$$

$$\psi = \arccos\left(\frac{3\xi}{\lambda\eta}\right) = \arccos\left(\frac{3(-0,063)}{1,3(-1,268)}\right) = 83,387^\circ$$

$$\sigma = -\frac{b}{3a} = -\frac{-1,95}{3 \times 1} = 0,65$$

donc

$$y_1 = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}\psi\right) + \sigma = 1,3 \cos\left(\frac{1}{3}83,387\right) + 0,65 = 1,8, \quad \boxed{y_1 = 1,8 \text{ m}}$$

$$y_3 = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}(\psi + 720)\right) + \sigma = 1,3 \cos\left(\frac{1}{3}(83,387 + 720)\right) + 0,65 = 0,60, \quad \boxed{y_2 = 0,6 \text{ m}}$$

$$y_2 = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}(\psi + 360)\right) + \sigma = 1,3 \cos\left(\frac{1}{3}(83,387 + 360)\right) + 0,65 = -0,45 \text{ (impossible d'avoir une profondeur négative).}$$

2) Les les nombres de *Froude* correspondants

Pour $\alpha = 1$ et $\cos \phi = 1$ et connaissons que $D = y$ pour un canal rectangulaire, on a :

$$F_{r1} = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{Q}{by_1\sqrt{gy_1}} = \frac{7,72}{2,5 \times 1,8\sqrt{9,81 \times 1,8}}$$

$$\boxed{F_{r1} = 0,408}, F_{r1} < 1 \text{ donc un régime fluvial,}$$

$$F_{r2} = \frac{Q}{by_2\sqrt{gy_2}} = \frac{7,72}{2,5 \times 0,6\sqrt{9,81 \times 0,6}}$$

$$\boxed{F_{r1} = 2,121}, F_{r2} > 1 \text{ donc un régime torrentiel.}$$