

Solution 4.6

1) Détermination du type de courbe de la ligne d'eau

Pour déterminer le type de courbe de la ligne d'eau, il faut calculer y_n et y_c

1.a) Calcul de la profondeur normale numériquement

À partir des relations (2.20) du tableau 2.4 :

$$\frac{nQ}{S_0^{1/2}} = \frac{[(b + my_n)y_n]^{5/3}}{[b + 2y_n\sqrt{1 + m^2}]^{2/3}} \quad (2.20)$$

Pour trouver y_n , nous allons adopter la démarche par essais et erreurs comme le montre le tableau S4.6.1, avec :

$$M_{n1} = \frac{0,03 \times 17,685}{\sqrt{0,0022}} = 11,311 \text{ et}$$

$$M_{n2} = \frac{[(5 + y_n)y_n]^{5/3}}{[5 + 2\sqrt{2}y_n]^{2/3}}$$

TABLEAU S4.6.1 – Calcul de la profondeur normale.

Essais	y_n (m)	M_{n1}	M_{n2}	Remarque
1	1,0	11,311	5,025	non ! $M_{n1} > M_{n2}$, essayer $y_n > 1,0$ m
2	1,4	11,311	8,960	non ! $M_{n1} > M_{n2}$, essayer $y_n > 1,4$ m
3	1,8	11,311	13,921	non ! $M_{n1} < M_{n2}$, essayer $1,4 < y_n < 1,8$ m
4	1,6	11,311	11,311	oui ! $M_{n1} > M_{n2}$, donc $1,6 < y_n = 1,8$ m

La profondeur normale est donc : $y_n = 1,6$ m.

1.b) Calcul de la profondeur critique numériquement

À partir des relations (3.12) du tableau 3.1 :

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{y_c^3(b + my_c)^3}{(b + 2my_c)} \quad (3.12)$$

Pour trouver y_c , nous allons adopter la démarche par essais et erreurs comme le montre le tableau S4.6.2 avec :

$$M_{c1} = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1 \times 17,685^2}{9,81} = 31,882$$

$$M_{c2} = \frac{y_c^3(b + my_c)^3}{(b + 2my_c)} = \frac{y_c^3(5 + y_c)^3}{(5 + 2y_c)}$$

TABLEAU S4.6.2 – Calcul de la profondeur critique.

Essais	y_n (m)	M_1	M_2	Remarque
1	1,5	31,882	115,857	non ! $M_{c1} < M_{c2}$, essayer $y_c < 1,5$ m
2	0,9	31,882	22,018	non ! $M_{c1} > M_{c2}$, essayer $0,9 < y_c < 1,5$ m
3	1,0	31,882	30,857	oui ! $M_{c1} \approx M_{c2}$, donc $y_c = 1,0$ m

La profondeur critique est donc : $y_c = 1,0$ m.

Comme $y_n > y_c$, l'écoulement est à pente faible, la ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type **M**. Le canal se termine par une chute brusque où l'on admet que l'écoulement passe par y_c . La ligne d'eau évalue de y_c en aval à y_n en amont, donc $y_c < y < y_n$. Dans ce cas la forme de la surface d'eau est de type de branche **M2**. L'écoulement étant fluvial, $F_r < 1$, puisque $y > y_c$. Les calculs se font en se dirigeant vers l'amont.

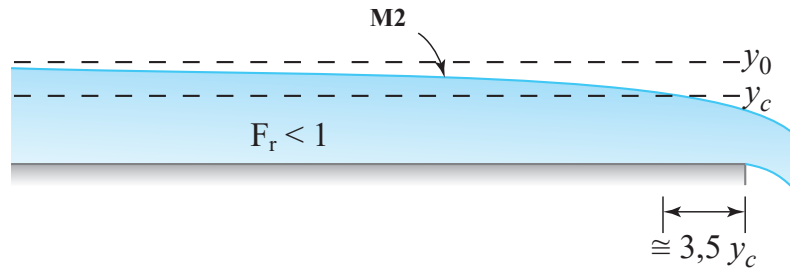


FIGURE S4.6A – Schéma de la ligne d'eau

2.a) Calcul de la ligne d'eau avec la méthode des variations de profondeur

La ligne d'eau est déterminée en calculant les distances entre les profondeurs dans l'intervalle $1,0 < y < 1,6$ m. La feuille pour le calcul de la ligne d'eau (tableau S4.6.3) est préparée sur micro-ordinateur à l'aide d'un tableur. Les explications concernant les colonnes ainsi que la procédure de calcul sont données au bas de cette feuille.

Selon les résultats présentés dans la feuille de calcul, l'écoulement non uniforme atteint la profondeur normale à une distance de $x = 402,564$ m du point de contrôle.

2.b) Calcul de la ligne d'eau avec la méthode des tronçons

Le calcul de la profondeur dans des sections successives se fait par une procédure itérative. Cette procédure peut facilement être programmée sur micro-ordinateur à l'aide d'un tableur. La feuille de calcul préparée est présentée dans le tableau S4.6.4. Les explications concernant les colonnes sont données au bas de la feuille.

Contrairement à la méthode des variations des profondeurs, la méthode des tronçons ne permet pas de calculer directement la distance à laquelle l'écoulement atteint la profondeur normale, $y_n = 1,6$ m. Les calculs présentés dans la feuille de calcul indiquent que l'écoulement non uniforme a quasiment (asymptotiquement) atteint la profondeur normale à une distance $x = 700$ m du point de contrôle, mais ils ne disent pas si cette profondeur a été atteinte à une distance plus ou non. La réponse cette question ne peut être donnée qu'en cherchant la plus petite valeur de x pour laquelle la profondeur est égale la profondeur normale.

3) Traçage des lignes d'eau

Les lignes d'eau, $WS = y + z$, calculées avec les deux méthodes sont dessinées sur la figure S4.6b. Bien que la méthode des tronçons est plus longue, les deux lignes d'eau calculées sont pratiquement identiques. Notons ici que la méthode des tronçons est une méthode implicite (itérative). Pour plus de précision dans la méthode des variations des profondeurs, il convient de resserrer la variation des profondeurs, y_{i+1} et y_i .

La longueur de la zone d'écoulement non uniforme ne peut pas être calculée directement avec la méthode des tronçons.

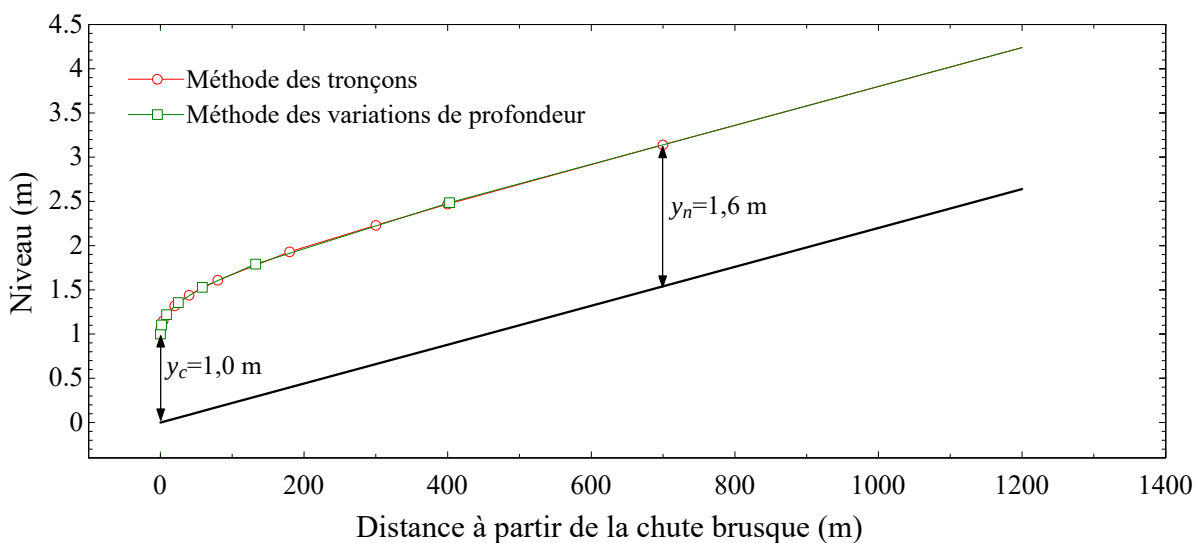


FIGURE S4.6B – Schéma de la ligne d'eau

TABLEAU S4.6.3 – Solution par la méthode des variations de profondeur.

y (m)	P_w (m)	A m ²	R_h (m)	V (m/s)	E_s (m)	ΔE_s (m)	S_f (m/m)	$\bar{S}_f$ (m/m)	Δx (m)	x (m)	z (m)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,00	7,828	6,000	0,766	2,948	1,443		0,0111476			0	0
1,10	8,111	6,710	0,827	2,636	1,454	0,011250	0,0080506	0,0095991	1,520	1,520	0,003
1,20	8,394	7,440	0,886	2,377	1,488	0,033931	0,0059728	0,0070117	7,052	8,572	0,019
1,30	8,677	8,190	0,944	2,159	1,538	0,049671	0,0045324	0,0052526	16,272	24,844	0,055
1,40	8,960	8,960	1,000	1,974	1,599	0,060909	0,0035061	0,0040193	33,480	58,324	0,128
1,50	9,243	9,750	1,055	1,814	1,668	0,069126	0,0027574	0,0031317	74,190	132,514	0,292
1,60	9,525	10,560	1,109	1,675	1,743	0,075262	0,0022000	0,0024787	270,050	402,564	0,886

Explications des colonnes du tableau S4.6.3

Col.	expression	explications	Col.	expression	explications
1	y	profondeur d'eau	7	$\Delta E_s = (E_s)_{i+1} - (E_s)_i$	différence de la charge spécifique entre la section (i + 1) et la section précédente (i).
2	$P_w = b + 2y\sqrt{1 + m^2}$	périmètre mouillé	8	$S_f = n^2 V^2 / R_h^{4/3}$	pente de la ligne d'énergie par rapport à l'horizontale
3	$A = y(b + my)$	surface mouillée	9	$\bar{S}_f = \frac{S_{f_{i+1}} + S_{f_i}}{2}$	pente moyenne de la ligne d'énergie entre la section (i + 1) et la section précédente (i).
4	$R_h = A/P_w$	rayon hydraulique	10	$\Delta x = s \frac{\Delta E_s}{(\bar{S}_f - S_0)}$	distance entre la section (i + 1) et la section précédente (i). s = +1 pour un écoulement fluvial et s = -1 pour un écoulement torrentiel
5	$V = Q/A$	vitesse moyenne dans la section	11	$x = \sum_1^{i+1} \Delta x$	distance cumulée depuis la section de contrôle jusqu'à la section (i + 1).
6	$E_s = y + V^2/(2g)$	Energie spécifique	12	$z_{i+1} = z_i + S_0 \Delta x$	cote du fond du canal par rapport à un plan de référence choisi.

TABLEAU S4.6.4 – Solution par la méthode de tronçons.

x (m)	Δx (m)	z (m)	y (m)	T (m)	P_w (m)	A (m ²)	V (m/s)	E (m)	R_h (m)	S_f	$\overline{S_f}$	ΔH_f (m)	E_{cal} (m)	ΔE (m)	D (m)	F_r	Δy (m)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0,00	0,00	0,000	1,000	7,000	7,828	6,000	2,948	1,443	0,766	0,0111			1,4428	0,0000			
0,05	0,05	0,000	1,050	7,100	7,970	6,353	2,784	1,445	0,797	0,0094	0,0103	0,0005	1,4433	0,0018	0,895	0,940	-0,0154
0,05	0,05	0,000	1,035	7,069	7,926	6,243	2,833	1,444	0,788	0,0099	0,0105	0,0005	1,4433	0,0003	0,883	0,962	-0,0044
0,05	0,05	0,000	1,030	7,060	7,914	6,212	2,847	1,443	0,785	0,0101	0,0106	0,0005	1,4433	0,0000	0,880	0,969	-0,0005
1,00	0,95	0,002	1,100	7,200	8,111	6,710	2,636	1,456	0,827	0,0081	0,0091	0,0086	1,4519	0,0043	0,932	0,872	-0,0171
1,00	0,95	0,002	1,083	7,166	8,063	6,587	2,685	1,452	0,817	0,0085	0,0093	0,0088	1,4522	0,0003	0,919	0,894	-0,0015
1,00	0,95	0,002	1,081	7,163	8,059	6,576	2,689	1,452	0,816	0,0085	0,0093	0,0088	1,4522	0,0000	0,918	0,896	0,0000
4,00	3,00	0,009	1,200	7,400	8,394	7,440	2,377	1,497	0,886	0,0060	0,0073	0,0218	1,4739	0,0228	1,005	0,757	-0,0505
4,00	3,00	0,009	1,150	7,299	8,251	7,069	2,502	1,477	0,857	0,0069	0,0077	0,0232	1,4754	0,0020	0,968	0,812	-0,0053
4,00	3,00	0,009	1,144	7,288	8,236	7,030	2,515	1,476	0,854	0,0070	0,0078	0,0234	1,4755	0,0000	0,965	0,818	-0,0001
20,00	16,00	0,044	1,300	7,600	8,677	8,190	2,159	1,582	0,944	0,0045	0,0058	0,0925	1,5680	0,0136	1,078	0,664	-0,0208
20,00	16,00	0,044	1,279	7,558	8,618	8,033	2,202	1,570	0,932	0,0048	0,0059	0,0946	1,5701	0,0002	1,063	0,682	-0,0003
40,00	20,00	0,088	1,400	7,800	8,960	8,960	1,974	1,687	1,000	0,0035	0,0041	0,0830	1,6531	0,0335	1,149	0,588	-0,0451
40,00	20,00	0,088	1,355	7,710	8,832	8,610	2,054	1,658	0,975	0,0039	0,0044	0,0872	1,6573	0,0006	1,117	0,621	-0,0008
80,00	40,00	0,176	1,500	8,000	9,243	9,750	1,814	1,844	1,055	0,0028	0,0033	0,1337	1,7910	0,0527	1,219	0,525	-0,0617
80,00	40,00	0,176	1,438	7,877	9,068	9,260	1,910	1,800	1,021	0,0032	0,0036	0,1424	1,7997	0,0005	1,176	0,562	-0,0005
180,00	100,00	0,396	1,500	8,000	9,243	9,750	1,814	2,064	1,055	0,0028	0,0030	0,2975	2,0972	-0,0335	1,219	0,525	0,0321
180,00	100,00	0,396	1,532	8,064	9,333	10,008	1,767	2,087	1,072	0,0026	0,0029	0,2877	2,0874	-0,0002	1,241	0,506	0,0002
300,00	120,00	0,660	1,600	8,200	9,525	10,560	1,675	2,403	1,109	0,0022	0,0024	0,2857	2,3731	0,0299	1,288	0,471	-0,0280
300,00	120,00	0,660	1,572	8,144	9,446	10,331	1,712	2,381	1,094	0,0023	0,0025	0,2941	2,3815	-0,0001	1,269	0,485	0,0001
400,00	100,00	0,880	1,600	8,200	9,525	10,560	1,675	2,623	1,109	0,0022	0,0023	0,2270	2,6085	0,0144	1,288	0,471	-0,0142
400,00	100,00	0,880	1,586	8,172	9,485	10,444	1,693	2,612	1,101	0,0023	0,0023	0,2305	2,6120	0,0000	1,278	0,478	0,0000
700,00	300,00	1,540	1,600	8,200	9,525	10,560	1,675	3,283	1,109	0,0022	0,0022	0,6705	3,2824	0,0005	1,288	0,471	-0,0003

Explications des colonnes du tableau S4.6.4

Col.	expression	explications	Col.	expression	explications
1	x	distance d'une section par rapport à l'origine	10	$R_h = A/P_w$	rayon hydraulique
2	$\Delta x = x_{i+1} - x_i$	distance entre la section actuelle ($i + 1$) et la section précédente (i)	11	$S_f = n^2 V^2 / R_h^{4/3}$	pente de la ligne d'énergie par rapport à l'horizontale
3	$z_{i+1} = z_i + S_0 \Delta x$	cote du fond du canal par rapport à un plan de référence choisi	12	$\overline{S_f} = \frac{S_{f_i} + S_{f_{i+1}}}{2}$	pente moyenne de la ligne d'énergie entre la section ($i + 1$) et la section précédente (i)
4	y	estimation pour la profondeur d'eau. L'itération sur y s'arrête quand $\Delta E \approx 0$	13	$\Delta H_f = \overline{S_f} \Delta x$	perte de charge entre la section ($i + 1$) et la section précédente (i)
5	$T = b + 2my$	largeur à la surface libre	14	$E_{calc} = (E_i)_{calc} + s(\Delta H_f)_{i+1}$	charge totale calculée. $s = +1$ pour un écoulement fluvial et $s = -1$ pour un écoulement torrentiel
6	$P = b + 2y\sqrt{1 + m^2}$	périmètre mouillé	15	$\Delta E = (E_{i+1}) - (E_{i+1})_{calc}$	critère de convergence. L'itération sur y s'arrête quand $\Delta E \approx 0$
7	$A = y(b + my)$	surface mouillée	16	$D = A/T$	profondeur hydraulique
8	$V = Q/A$	vitesse moyenne dans la section	17	$F_r = V / \sqrt{gD}$	nombre de <i>Froude</i>
9	E	charge totale (énergie)	18	$\Delta y = - \frac{\Delta E}{1 - F_r^2 + \frac{\Delta x}{3} S_f \left(\frac{5}{D} - \frac{2}{P} \frac{dP}{dy} \right)}$	Correction de y . Pour un canal trapézoïdal $dP/dy = 2\sqrt{1 + m^2}$