

- 8° L'équation dynamique du mouvement, éq. 2.12, peut aussi être obtenue en utilisant le théorème de quantité de mouvement. On obtiendra pratiquement le même résultat (voir *Chow*, 1959, p. 51 et *Henderson*, 1966, p. 9), c.-à-d. l'éq. 2.12.

2.3 ENERGIE SPECIFIQUE

- 1° Dans l'étude qui précède, pour définir la charge totale, H , dans une section donnée, on se rapporte à un plan de référence horizontal quelconque (voir Fig. 2.2); pour une pente faible, on a écrit :

$$\frac{U^2}{2g} + h + z = H \quad (2.9)$$

Si l'on se réfère maintenant au fond du canal - le terme z est fixé par l'implantation du canal -, on définit une fraction de la charge totale, appelée charge spécifique, H_s (voir *Bakmeteff*, 1932, chap. 4); on écrit alors (voir Fig. 2.4) :

$$\frac{U^2}{2g} + h = H_s \quad (2.14)$$

Avec l'équation de continuité, $Q = US$, on obtient :

$$\frac{Q^2/S^2}{2g} + h = H_s \quad (2.14a)$$

- 2° La notion de charge spécifique est souvent très commode; elle facilite la compréhension et aide à résoudre différents problèmes d'écoulement à surface libre.

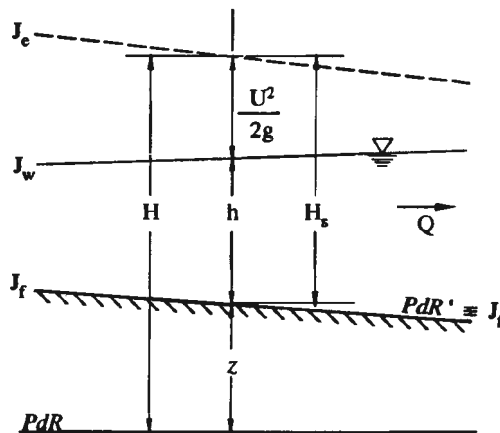


Fig. 2.4 Définition de la charge totale, H , et de la charge spécifique, H_s .

- 3° Pour une section d'un canal donné, la surface, S , est une fonction de la profondeur d'eau, h , et l'éq. 2.14a établit une relation de la forme suivante :

$$H_s = f(Q, h)$$

qui permettra l'étude de la variation de :

- i) h avec H_s , pour $Q = \text{Cte}$
- ii) h avec Q , pour $H_s = \text{Cte}$.

2.3.1 Courbe d'énergie spécifique

- 1° L'éq. 2.14a donne l'évolution de la charge spécifique, H_s , en fonction de la profondeur d'eau, h , pour un débit, $Q = US$, donné.

Cette courbe (voir Fig. 2.5) a deux asymptotes :

- i) pour $h = 0$, une asymptote horizontale,
- ii) pour $h = \infty$, la droite $h = H_s$ est une autre asymptote.

De plus, la courbe a un minimum, H_{sc} , pour :

$$\frac{dH_s}{dh} = -\frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh} + 1 = 0 \quad (2.15)$$

Du fait que dS/dh est égal à la largeur du canal, B , à la surface libre et avec la définition de la profondeur hydraulique, $D_h = S/B$, on obtient :

$$\frac{Q^2}{g} \frac{B}{S^3} = \frac{U^2}{gD_h} = 1 \quad (2.15a)$$

- 2° Pour un canal de section rectangulaire, on a $D_h = h$. La valeur, h , qui correspond à une charge spécifique minimale, H_{sc} , est appelée *profondeur critique*, h_c .
- 3° En suivant la courbe de la Fig. 2.5, on constatera que pour un débit donné, $Q = \text{Cte}$, et pour une valeur quelconque de charge spécifique, H_s , - dans le cas où un écoulement peut avoir lieu - il y a toujours deux solutions pour les profondeurs d'eau, h_1 et h_2 . On les appelle les profondeurs correspondantes. L'une, h_1 , est inférieure et l'autre, h_2 , est supérieure à la profondeur critique, h_c . Toutes deux indiquent différents régimes d'écoulement, soit :

$h < h_c$ régime *torrentiel* (sur-critique)

$h > h_c$ régime *fluvial* (sous-critique)

$h \equiv h_c$ régime *critique*

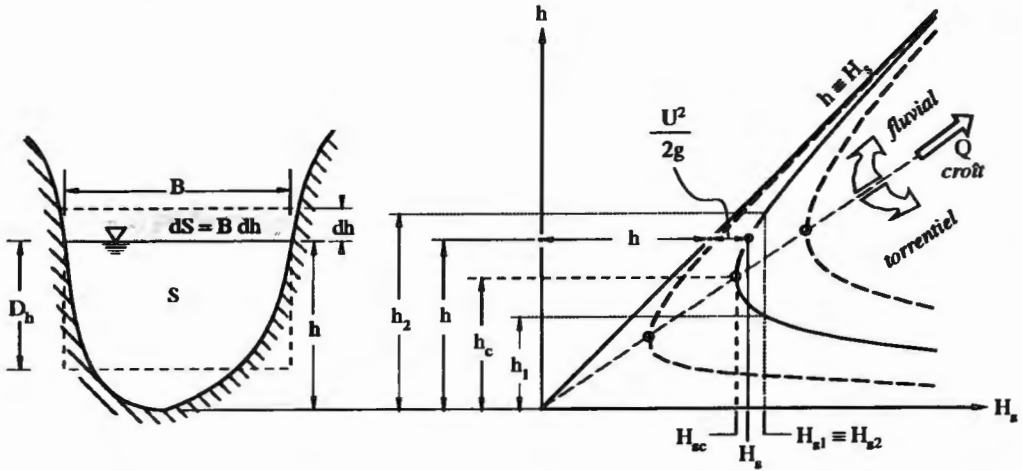


Fig. 2.5 Courbe d'énergie spécifique, $H_s = f(h)$, pour $Q = \text{Cte}$.

Chaque courbe (voir Fig. 2.5) présente donc deux branches. Il s'ensuit qu'un écoulement permanent peut se produire dans un canal de deux manières différentes tout en ayant la même énergie spécifique :

- i) en régime torrentiel, avec une faible profondeur et une forte vitesse,
- ii) en régime fluvial, avec une grande profondeur et une faible vitesse.

4° S'il y a variation de débit, Q , les courbes correspondantes ont la même forme et s'emboîtent (voir Fig. 2.5) les unes dans les autres en s'éloignant de l'origine quand le débit augmente.

2.3.2 Courbe de débit

1° L'éq. 2.14a donne aussi l'évolution du débit, Q , en fonction de la profondeur d'eau, h , pour une charge spécifique, H_s , comme suit :

$$Q = S \sqrt{2g (H_s - h)} \quad (2.16)$$

On obtient de cette courbe (voir Fig. 2.6) :

- i) pour $h = 0$, $Q = 0$
- ii) pour $h = H_s$, $Q = 0$.

2° De plus, la courbe a un maximum, $Q_{\max}$, pour :

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{2g (H_s - h) (dS/dh) - Sg}{[2g (H_s - h)]^{1/2}} = 0$$

Avec $dS/dh = B$ et $D_h = S/B$, on écrit :

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{gB [2 (H_s - h) - D_h]}{[2g (H_s - h)]^{1/2}} = 0 \quad (2.17)$$

Cette dérivée est nulle si :

$$2 (H_s - h) - D_h = 0 \quad (2.18)$$

Les valeurs, h et D_h , qui correspondent à un débit maximal, $Q_{\max}$, sont les *profondeurs critiques*, h_c et D_{h_c} . Pour un débit inférieur à $Q_{\max}$, on retrouve les deux différents régimes d'écoulement (voir Fig. 2.6 et aussi Fig. 2.5).

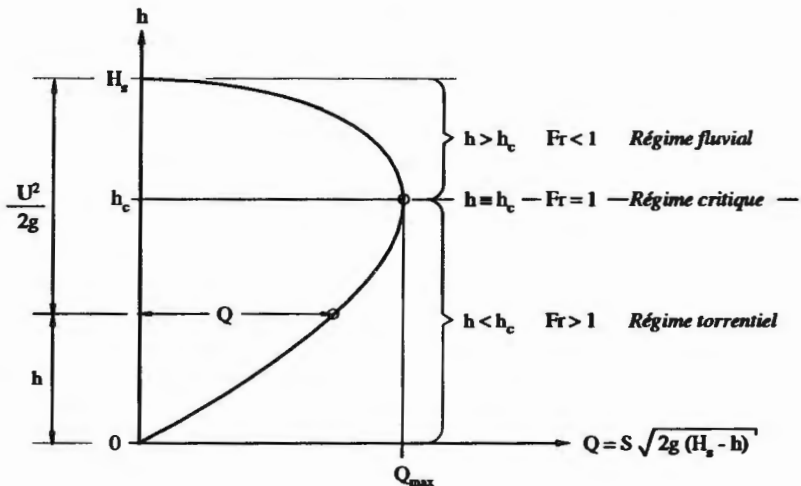


Fig. 2.6 Courbe des débits, $Q = f(h)$, pour $H_s = \text{Cte}$.

3° Pour un canal de section rectangulaire, $D_h \equiv h$, l'éq. 2.18 devient :

$$2 (H_s - h) - h = 0$$

d'où l'on obtient pour la profondeur critique ($h \equiv h_c$ et $H_s \equiv H_{sc}$) :

$$h_c = \frac{2}{3} H_{sc} \quad (2.19)$$

Pour des canaux de section triangulaire et parabolique, on obtient respectivement :

$$h_c = \frac{4}{5} H_{sc} \quad \text{et} \quad h_c = \frac{3}{4} H_{sc} \quad (2.19a, b)$$

2.3.3 Profondeur critique

1° La profondeur critique, h_c , d'un canal est la profondeur d'eau à laquelle :

- i) l'énergie spécifique est minimale, H_{sc} , pour un débit donné (voir Fig. 2.5),
- ii) le débit est maximal, Q_{max} , pour une énergie spécifique donnée (voir Fig. 2.6).

2° Il s'ensuit que l'éq. 2.18 s'écrit :

$$2 (H_{sc} - h_c) = D_{hc}$$

et que, en utilisant l'éq. 2.16, le débit maximal, Q_{max} , est donné par :

$$Q_{max} = S \sqrt{g D_{hc}} \quad (2.20)$$

La vitesse moyenne correspondant à la profondeur hydraulique critique, D_{hc} , est :

$$U_c = \sqrt{g D_{hc}} \quad \text{ou} \quad \frac{U_c^2}{2g} = \frac{D_{hc}}{2} \quad (2.21)$$

En régime critique, la charge cinétique est donc égale à la moitié de la profondeur hydraulique.

3° L'éq. 2.21 ou l'éq. 2.15a peuvent aussi être écrites ainsi :

$$\frac{U_c}{\sqrt{g D_{hc}}} = 1 \quad (2.22)$$

qui est d'ailleurs la définition du nombre de Froude (voir éq. 1.4) en régime critique. En régime critique, le nombre de Froude, Fr , est donc l'unité :

$$Fr_c = 1 \quad (2.22a)$$

Notons que le nombre de Froude, $Fr = U/\sqrt{g D_h}$, est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de gravité par volume unitaire (voir *Graf & Altinakar*, 1991, sect. FR. 7.3). Par conséquent, le nombre de Froude, lui aussi, classe les différents régimes comme suit :

$Fr > 1$	<i>régime torrentiel</i>	$U > U_c$
$Fr < 1$	<i>régime fluvial</i>	$U < U_c$
$Fr = 1$	<i>régime critique</i>	$U \equiv U_c$

- 4° La vitesse critique, U_c , donnée par :

$$U_c = \sqrt{gD_{hc}} = c \quad (2.21a)$$

est égale à la *célérité*, c , de propagation des ondes (superficielles) infinitésimales de gravité dans un canal de profondeur hydraulique, D_{hc} (voir éq. 2.27 pour la définition générale).

- 5° La profondeur critique pour un canal de section rectangulaire, $D_h \equiv h$, a été donnée par :

$$h_c = \frac{2}{3} H_{sc} \quad (2.19)$$

ou par :

$$(H_{sc} - h_c) = \frac{h_c}{2} = \frac{U_c^2}{2g}$$

En introduisant la définition du débit unitaire, $q = Uh$, on obtient :

$$\frac{h_c}{2} = \frac{q^2}{2gh_c^2} \quad \text{ou} \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (2.23)$$

Le débit unitaire maximum, q , qui peut s'écouler dans un canal à section rectangulaire est égal à :

$$q = \sqrt{gh_c^3} = \sqrt{g \left(\frac{2}{3} H_{sc} \right)^3} \quad (2.24)$$

- 6° L'expérience montre que l'écoulement à profondeur critique, h_c , est souvent *instable*, ce qui se traduit par des fluctuations de la surface libre. Ceci est bien évident sur la Fig. 2.5 : même une faible variation de l'énergie autour de sa valeur critique, H_{sc} , provoque d'importantes variations dans la profondeur d'eau, h .

- 7° Selon l'éq. 2.20 et l'éq. 2.24, la profondeur hydraulique critique, D_{hc} , ou la profondeur critique, h_c , dépendent uniquement du débit. On y voit donc tout l'intérêt à les utiliser comme débitmètres dans les canaux.

En voici deux exemples :

- i) *Chute brusque* : Un canal horizontal (ou un déversoir épais à crête horizontale) débite librement dans l'atmosphère; la section critique se trouve très près de l'arête (voir sect. 4.4.2).

ii) *Canal Venturi* : On provoque une réduction de la section du canal, appelée col, dans laquelle on fait apparaître le régime critique (voir sect. 4.4.2).

8° L'écoulement passe par la profondeur critique quand il y a passage d'un écoulement fluvial à un écoulement torrentiel. Elle s'installe aussi s'il existe une chute brusque en aval d'un écoulement fluvial.

2.4 ONDE DE GRAVITE

Dans un canal, un écoulement variable dans le temps se manifeste par une onde de gravité à la surface libre.

2.4.1 Célérité d'onde

1° On considère ici une onde périodique simple qui représente la propagation d'un mouvement irrotationnel satisfaisant à l'équation de Laplace; la pression est constante à la surface libre et les amplitudes sont faibles. Un canal de section rectangulaire et de profondeur uniforme est rempli d'eau au repos; il n'y a donc pas d'écoulement.

2° Une onde bidimensionnelle et progressive dans la direction selon x^+ sera donnée (voir Fig. 2.7) par un déplacement périodique de la surface libre en fonction du temps, t , (voir *Kinsman*, 1965, p. 117) par :

$$\eta(x, t) = A \cos(2\pi x/L - 2\pi t/T) \quad (2.25)$$

où A est l'amplitude égale à la moitié de la hauteur d'onde $H = 2A$, L la longueur d'onde et T la période d'onde. La célérité d'onde est définie par :

$$c = \frac{L}{T} \quad (2.25a)$$

3° La théorie hydrodynamique pour les ondes de *faible amplitude* (voir *Lamb*, 1945, pp. 254 et 366, ou *Kinsman*, 1965, p. 125), c.-à-d. : $H/L \ll 1$ et $H/h \ll 1$, donne pour la vitesse apparente de propagation, également appelée *célérité*, d'une intumescence :

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (2.26)$$

où h est la profondeur d'eau. La célérité ne dépend pas de la hauteur d'onde, H .