

4.1 ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIE

4.1.1 Equations simplifiées de Saint-Venant

- 1° On considère (voir Fig. 4.1) un canal prismatique à surface libre où l'écoulement est permanent, non uniforme (graduellement varié) et presque rectiligne et parallèle. On admet que la pente de fond, J_f , fixe et permanente, est faible et que le débit d'un fluide incompressible est donné par $Q = US$, avec $U(x)$ comme vitesse moyenne pour toute la section mouillée, $S(x)$. Il n'y a pas d'apport latéral.

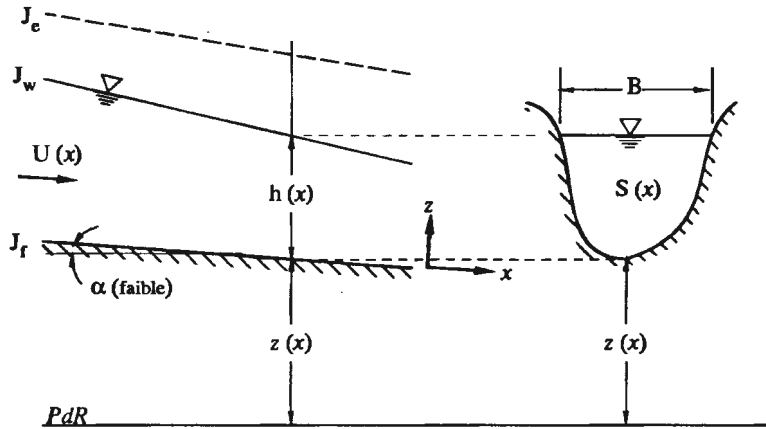


Fig. 4.1 Schéma d'un écoulement permanent et non uniforme sur une pente à fond fixe, $z(x)$.

- 2° L'équation de continuité, développée au sect. 2.1, est donnée (voir Fig. 2.1) par :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

Il serait plus exact, notamment pour les canaux non prismatiques, d'exprimer le deuxième terme par :

$$U \frac{\partial S}{\partial x} = U \left(\frac{\partial S}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{h = \text{Cte}} \right) \quad (4.1a)$$

parce que $S = f[h(x), x]$; et avec $\partial S / \partial h = B$.

Pour un canal prismatique rectangulaire, on écrit l'éq. 4.1 comme suit :

$$h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad B = \text{Cte} \quad (4.2)$$

- 3° L'équation dynamique du mouvement permanent et graduellement varié est développée dans le sect. 2.2 ; elle est donnée (voir Fig. 2.3) par :

$$\frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = -J_e \quad (4.3)$$

avec $J_f = -(\partial z/\partial x)$ comme pente de fond, $h_f = J_e \partial x$ comme perte de charge et J_e comme pente énergétique.

Comme première approximation, on admet que la pente énergétique, J_e , peut être donnée par une relation établie pour l'écoulement uniforme permanent (voir sect. 3.2) de type Weisbach-Darcy :

$$J_e = f \frac{1}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \quad (3.9)$$

ou de type Chézy :

$$J_e = \frac{8g}{C^2} \frac{1}{4R_h} \frac{U^2}{2g}$$

L'équation dynamique, éq. 4.3, peut aussi s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + S \frac{\partial h}{\partial x} + S \frac{\partial z}{\partial x} = -S J_e \quad (4.3a)$$

- 4° Les différents termes de l'éq. 4.3 peuvent être considérés comme une représentation des pentes. Dans le premier terme, la pente est due à la variation de la vitesse en espace. Le deuxième et le troisième terme donnent la pente de la surface libre, J_w . Le quatrième terme est la pente énergétique, J_e .

4.1.2 Equations de la surface libre

- 1° Le problème qui se pose dans l'étude d'un écoulement graduellement varié est de déterminer la position, x , et la forme, $h(x)$, de la surface libre pour un débit, Q , et une forme géométrique de section, S , donnés. On raisonnera pour un canal de longueur importante.
- 2° Cette étude peut être faite à partir de l'équation de l'énergie (voir Fig. 2.3) :

$$\frac{U^2}{2g} + h + z = H \quad (2.9)$$

et de l'équation de continuité :

$$Q = US \quad (2.2)$$

3° Par dérivation par rapport à x , l'éq. 2.9 devient :

$$\frac{d}{dx} \frac{(Q/S)^2}{2g} + \frac{dh}{dx} + \frac{dz}{dx} = \frac{dH}{dx} \quad (4.4)$$

Cependant, par définition (et en utilisant une relation de type Chézy) :

$$\frac{dz}{dx} = -J_f \quad ; \quad \frac{dH}{dx} = -J_e = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h}$$

on écrit :

$$\frac{d}{dx} \frac{(Q/S)^2}{2g} + \frac{dh}{dx} - J_f = -J_e = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (4.5)$$

Pour un canal donné, les arguments, C et S et R_h , sont des fonctions de x et de h , tandis que J_f est une fonction de x . Cette équation, éq. 4.5, constitue une équation différentielle du premier ordre; elle permet de déterminer la profondeur d'eau, $h(x)$, en fonction de la distance, x , pour un débit, Q , donné.

A noter que l'éq. 4.5, tout comme l'éq. 4.3a, est l'équation simplifiée de Saint-Venant; elle est valable pour les canaux prismatiques et non prismatiques.

4° Si le canal est prismatique, la section, S , n'est fonction que de la profondeur, h ; on exprime alors le premier terme de l'éq. 4.5 par :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} \right) = \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{S^3} \frac{dS}{dx} \right) = -\frac{Q^2}{gS^3} \left(\frac{dS}{dh} \frac{dh}{dx} \right) \quad (4.6)$$

Or, pour un canal prismatique, on pose par définition $dS/dh = B$; ce qui donne :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} \right) = -\frac{Q^2}{gS^3} B \frac{dh}{dx} \quad (4.6a)$$

5° L'équation différentielle, éq. 4.5, s'écrit par conséquent :

$$-\frac{(Q/S)^2}{gS} B \frac{dh}{dx} + \frac{dh}{dx} - J_f = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (4.7)$$

ou bien sous sa forme habituelle :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h J_f}}{1 - \frac{(Q/S)^2}{gS/B}} \quad (4.8)$$

Cette équation de l'écoulement graduellement varié, valable pour un canal prismatique, permet de tracer les formes de la surface libre (ligne d'eau) pour les différents cas possibles; et ceci sans qu'on soit obligé de l'intégrer.

L'équation différentielle, éq. 4.8, définit l'inclinaison (pente) par rapport au fond du canal et non pas la pente de la ligne d'eau; h est la profondeur et non la cote. L'argument dh/dx est positif si la profondeur d'eau, h , croît; négatif dans le cas contraire.

6° Voici quelques remarques intéressantes concernant l'éq. 4.8 :

i) La dérivée s'annule, $dh/dx = 0$, si le numérateur est :

$$(Q/S)^2 = C^2 R_h J_f \quad \Rightarrow \quad U = C \sqrt{R_h J_f} \quad (3.11)$$

L'écoulement est uniforme; il définit la *profondeur normale*, $h \equiv h_n$ (voir sect. 3.3.2). La surface libre est parallèle à la surface de fond du canal. Donc, pour :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= 0 && \text{la profondeur d'eau reste constante,} \\ \frac{dh}{dx} &> 0 && \text{la profondeur d'eau augmente et} \\ \frac{dh}{dx} &< 0 && \text{la profondeur d'eau diminue.} \end{aligned}$$

ii) La dérivée devient infini, $dh/dx = \infty$, si le dénominateur est :

$$(Q/S)^2 = gS/B \quad \Rightarrow \quad \frac{U^2}{gD_H} = Fr_c^2 = 1 \quad (2.22)$$

L'écoulement est critique; il définit la *profondeur critique*, $h \equiv h_c$ (voir sect. 2.3.3). La surface libre est perpendiculaire à la surface du fond; une constatation plus théorique que réelle.

iii) La profondeur normale et la profondeur critique sont égales, $h_n \equiv h_c$, si :

$$C^2 R_h J_f = gS/B$$

L'écoulement normal est critique. Ceci donne la définition (voir sect. 4.1.3) pour la *pente critique* :

$$J_f \equiv J_c = \frac{gS}{C^2 B R_h} \quad (4.9)$$

- 7° L'équation de l'écoulement graduellement varié, éq. 4.8, peut aussi être écrite en utilisant la notion de la débitance (voir sect. 3.3.1) :

$$K(h) = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S = C R_h^{1/2} S \quad (3.34)$$

Pour l'écoulement uniforme, cette relation prend la valeur suivante :

$$K_n(h) = Q/\sqrt{J_f} \quad (3.35)$$

L'expression dans le dénominateur de cette équation, éq. 4.8, peut alors être exprimée ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{Q^2 B}{g S^3} &= \frac{Q^2}{(C^2 S^2 R_h J_f)} \frac{(C^2 S^2 R_h J_f)}{(g S^3 / B)} = \frac{(Q/\sqrt{J_f})^2}{(C S R_h^{1/2})^2} \frac{J_f}{(g S / C^2 B R_h)} \\ &= \frac{K_n^2}{K^2} \cdot \frac{J_f}{J_c} \end{aligned}$$

où J_c est la pente critique donnée par l'éq. 4.9.

En utilisant les trois relations précédentes, on écrit l'éq. 4.8 sous la forme, présentée par *Bakhmeteff* (1932, p. 52) :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 \frac{J_f}{J_c}} \quad (4.8b)$$

- 8° Un autre type de réflexion sur l'éq. 4.8, cette fois pour un canal rectangulaire de largeur importante, s'avère également intéressant :

- i) La profondeur normale (voir sect. 3.3.2) est définie par :

$$h_n^3 = \frac{q^2}{C^2 J_f} \quad (3.36)$$

- ii) La profondeur critique (voir sect. 2.3.3) est définie par :

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g} \quad (2.24)$$

où $q = Q/B$, $h \equiv D_h$, $B \gg h$, $R_h \equiv h$

- iii) En utilisant l'éq. 3.36 et l'éq. 2.24, mais en admettant aussi que le coefficient de Chézy, C , n'est pas une fonction de la profondeur d'eau, h , l'éq. 4.8 s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3} \quad (4.8a)$$

Cette relation est connue sous le nom d'*équation de Bresse* (voir Jaeger, 1954, p. 74). En utilisant le coefficient de Manning, n , qui reste constant lui aussi, l'éq. 4.8a s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - (h_n/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3} \quad (4.8c)$$

- 9° L'équation de l'écoulement graduellement varié, éq. 4.8, vient d'être établie en supposant implicitement que les lignes de courant sont presque rectilignes et parallèles. Boussinesq (voir Flamant, 1923, p. 231 et Jaeger, 1954, p. 127) a présenté une équation générale en tenant compte de la courbure des lignes de courant.

Les écoulements avec fond graduellement varié sont étudiés par Massé (voir Jaeger, 1954, p. 136 et Chow, 1959, p. 237) pour les canaux prismatiques et non prismatiques; on obtient des solutions avec la méthode de point singulière.

4.1.3 Pente critique

- 1° La pente critique d'un canal, quelle qu'en soit sa forme, peut être calculée par :

$$J_c = \frac{gS}{C^2 B R_h} \quad (4.9)$$

Ceci est une fonction de la profondeur d'eau, h , qui définit une pente de manière que cette profondeur soit à la fois profondeur normale, h_n , et profondeur critique, h_c , quel que soit le débit.

- 2° Pour un canal rectangulaire de largeur importante, la pente critique est :

$$J_c = \frac{g}{C^2} \quad (4.9a)$$

- 3° La notion de pente critique joue un rôle important comme paramètre de référence dans l'étude de l'écoulement graduellement varié.

- 4° Si la pente de fond du canal - pour un débit, Q , et un coefficient de rugosité, C , donné - est inférieure à la pente critique, la profondeur normale sera supérieure à la profondeur critique; on l'écrit :

$$J_f < J_c \quad ; \quad h_n > h_c .$$

Le canal est dit à *faible pente*.

L'écoulement uniforme correspondant à la profondeur normale sera en régime sous-critique ou *fluvial* (voir sect. 2.3.1 et Fig. 2.5).

- 5° Si la pente de fond du canal est supérieure à la pente critique, la profondeur normale sera inférieure à la profondeur critique; on l'écrit :

$$J_f > J_c \quad ; \quad h_n < h_c .$$

Le canal est dit à *forte pente*.

L'écoulement uniforme correspondant à la profondeur normale sera en régime sur-critique ou *torrentiel*.

4.2 FORMES DE LA SURFACE D'EAU

- 1° Les courbes intégrales de l'écoulement graduellement varié, éq. 4.8, sont données sur la Fig. 4.2 en fonction de la pente de fond, J_f , et pour un débit, Q , donné (voir *Bakhmeteff*, 1932, chap. 7).

Avec ces différentes courbes, on ne cherche pas à donner une solution explicite, mais on propose plutôt de donner les formes semi-quantitatives de la variation de la profondeur, h , avec la distance, x , afin de se familiariser avec les phénomènes hydrauliques.

- 2° Les conditions aux limites sont les suivantes :

- i) Les courbes sont tangentes asymptotiquement à la ligne de profondeur normale, $h \equiv h_n$.
- ii) Les courbes sont orthogonales à la ligne de la profondeur critique, $h \equiv h_c$.
- iii) Si la profondeur croît de plus en plus, $h \rightarrow \infty$, les courbes tendent asymptotiquement vers une ligne horizontale, $dh/dx \rightarrow J_f$, où $J_f = -dz/dx$.

- 3° L'écoulement en aval et en amont de la profondeur critique, h_c , ne réunit plus les conditions simplificatrices admises pour la dérivation de l'équation de l'écoulement graduellement varié, éq. 4.8, (voir sect. 4.1.1). L'écoulement n'est notamment pas

rectiligne et parallèle, mais plutôt curviligne ou rapidement varié, ceci sur une distance assez courte. (La partie correspondante d'une courbe de ce type - tracée en pointillé sur la Fig. 4.2 - est donc plus théorique que réelle.)

Le franchissement du niveau critique, h_c , comporte presque toujours une variation rapide de la surface libre. Si la profondeur augmente, il se forme un *ressaut hydraulique* et si elle diminue, il se forme une *chute* (voir sect. 4.4).

- 4° En tenant compte des conditions aux limites de l'éq. 4.8, on peut tracer les formes de la surface d'eau pour les différents cas possibles.
- 5° On remarquera que la classification des courbes (voir Fig. 4.2) de la ligne d'eau s'organise autour de la pente de fond, J_f . On distingue les cinq cas suivants :

	$J_f < J_c$	canaux à pente <i>faible</i>	: M
$J_f > 0$	$J_f > J_c$	canaux à pente <i>forte</i>	: S
	$J_f = J_c$	canaux à pente <i>critique</i>	: C
$J_f = 0$		canaux à pente <i>zéro</i>	: H
$J_f < 0$		canaux à <i>contre-pente</i>	: A

- 6° Chaque courbe comporte différentes branches qui, dans leur ensemble, ne représentent pas une ligne réelle de la surface d'eau, mais plutôt un ensemble de divers cas possibles. Une surface d'eau réelle est alors représentée par une *seule* branche. Si la surface d'eau est composée de plusieurs branches, ces dernières appartiendront à des classes distinctes.
- 7° Un principe général, d'une importance majeure, valable pour chaque courbe (et ses branches) doit être respecté :
- i) L'écoulement sous-critique, $Fr < 1$, est contrôlé par une singularité en *aval* (chute brusque, déversoir, etc.). Le calcul doit se faire en montant vers l'amont.
 - ii) L'écoulement sur-critique, $Fr > 1$, est contrôlé par une singularité en *amont* (chute brusque, vanne, etc.). Le calcul doit se faire en descendant vers l'aval.

Dans les exemples donnés sur la Fig. 4.2a, le *point de contrôle* est toujours indiqué.

- 8° On étudiera d'abord les pentes descendantes, $J_f > 0$, puis les pentes horizontales, $J_f = 0$, et ensuite les contre-pentes, $J_f < 0$. Le tout est résumé sur la Fig. 4.2, avec quelques exemples sur la Fig. 4.2a.

4.2.1 Canaux à pente faible

- 1° Les formes que peut prendre la surface libre dans un canal descendant, $J_f > 0$, à pente faible si

$$J_f < J_c ; \quad h_n > h_c$$

sont résumées sur la Fig. 4.2. La courbe comprend trois branches : M1, M2 et M3.

- 2° *Branche M1 :*

$$h > h_n > h_c ; \quad Fr < 1 ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe vient de l'amont, se raccordant asymptotiquement à la profondeur normale, h_n , pour tendre vers l'aval, en croissant vers une tangente horizontale.

On rencontre la branche M1, par exemple :

- en amont d'un barrage,
- en amont des piles d'un pont,
- dans certains changements brusques de pente.

Cette branche, qu'on rencontre très fréquemment, est *la* courbe de remous (d'exhaussement).

- 3° *Branche M2 :*

$$h_n > h > h_c ; \quad Fr < 1 ; \quad dh/dx \text{ est négatif.}$$

En amont, la courbe se raccorde asymptotiquement à la profondeur normale, h_n , pour tendre vers l'aval en décroissant perpendiculairement vers la profondeur critique, h_c .

La branche M2 se rencontre, par exemple :

- en amont d'une augmentation de pente,
- en amont d'une chute brusque.

- 4° *Branche M3 :*

$$h_n > h_c > h ; \quad Fr > 1 ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe vient de l'amont en augmentant, pour tendre en aval vers la profondeur critique, h_c , qu'elle atteint perpendiculairement en formant un ressaut hydraulique (voir sect. 4.4.4).

Conditions Eq. 4.8a	$\frac{h_n}{h}$	Signe num.	$\frac{h_c}{h}$	Signe dén.	Signe dh/dx	Changement de profondeur	Nom	Figures échelle verticale exagérée
$J_f > 0$								
$J_f < J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	M1	
$h_n > h_c$	< 1	+	> 1	-		pas possible		
	> 1	-	< 1	+	-	décroît	M2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	M3	
$J_f > 0$								
$J_f > J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	S1	
$h_n < h_c$	< 1	+	> 1	-	-	décroît	S2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	S3	
$J_f > 0$								
$J_f = J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	C1	
$h_n = h_c$	> 1	-	> 1	-	+	croît	C3	
$J_f = 0$								
$h_n = \infty$	-	-	< 1	+	-	décroît	H2	
	-	-	> 1	-	+	croît	H3	
$J_f < 0$								
$h_n < 0$	< 1	-	< 1	+	-	décroît	A2	
	< 1	-	> 1	-	+	croît	A3	

Fig. 4.2 Surface d'eau de l'écoulement graduellement varié dans un canal à pente.

—▽— surface d'eau ; — — — profondeur normale ; - - - - - profondeur critique

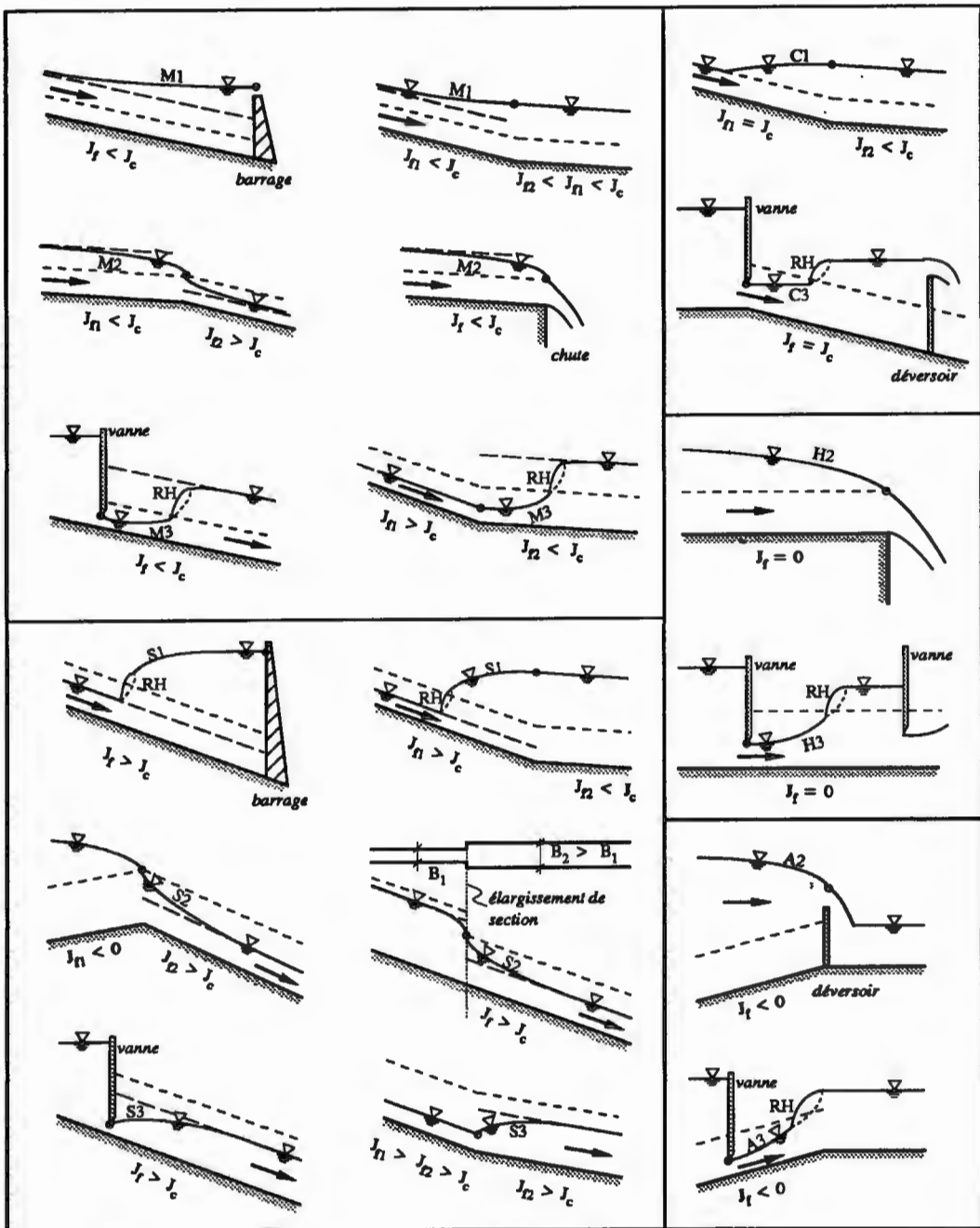


Fig. 4.2a Quelques exemples d'écoulement.

○ section de contrôle ; RH ressort hydraulique

La branche M3 se rencontre, par exemple :

- lors d'un écoulement à grande vitesse entrant dans un canal à pente faible,
- dans certains changements de pente.

Cette branche est souvent prolongée par un ressaut hydraulique.

4.2.2 Canaux à pente forte

1° Les formes que peut prendre la surface d'eau dans un canal descendant, $J_f > 0$, à pente forte si

$$J_f > J_c \quad ; \quad h_n < h_c$$

sont résumées sur la Fig. 4.2. La courbe comprend trois branches : S1, S2 et S3.

2° *Branche S1 :*

$$h > h_c > h_n \quad ; \quad Fr < 1 \quad ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe prend naissance à la profondeur critique, h_c , orthogonalement et se termine, en croissant, tangentiellement à une horizontale.

La branche S1 se rencontre, par exemple :

- en amont (au remous) d'un barrage,
- dans certains changements de pente.

Cette branche est souvent précédée d'un ressaut hydraulique.

3° *Branche S2 :*

$$h_c > h > h_n \quad ; \quad Fr > 1 \quad ; \quad dh/dx \text{ est négatif.}$$

La courbe correspond à un régime de transition entre la profondeur critique et un écoulement uniforme.

La branche S2 se rencontre, par exemple :

- en aval d'une augmentation brusque de pente,
- dans l'élargissement de la section.

4° *Branche S3 :*

$$h_c > h_n > h \quad ; \quad Fr > 1 \quad ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe correspond à un régime transitoire entre un écoulement à grande vitesse et un écoulement normal, vers lequel il tend asymptotiquement.

La branche S3 se rencontre, par exemple :

- dans un écoulement sous une vanne dénoyée débouchant dans un canal à forte pente,
- lorsque la pente diminue brusquement tout en restant supérieure à la pente critique.

4.2.3 Canaux à pente critique

1° Les formes que peut prendre la surface libre dans un canal à pente critique si

$$J_f \equiv J_c ; \quad h_n \equiv h_c$$

sont résumées sur la Fig. 4.2. La courbe comprend deux branches : C1 et C3.

Ce cas est la limite commune des deux groupes précédents, M et S, avec la disparition de la branche intermédiaire, C2.

2° Pour $h_n \equiv h_c$, l'équation différentielle, éq. 4.8a, devient :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \quad (4.10)$$

La courbe représentative est donc horizontale.

En régime critique, l'écoulement est instable; des ondulations sont provoquées à la surface de l'eau (voir sect. 2.3.3).

3° *Branche C1 :*

$$h > h_n (\equiv h_c) ; \quad Fr < 1 ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe est horizontale.

La branche C1 se rencontre, par exemple :

- à un changement de pente, séparant le passage de la pente critique à une pente moindre,
- au raccordement d'un canal à pente critique à un réservoir.

4° *Branche C3 :*

$$h < h_n (\equiv h_c) ; \quad Fr > 1 ; \quad dh/dx \text{ est positif.}$$

La courbe est aussi horizontale.

La branche C3 se rencontre, par exemple :

- lors d'un écoulement à grande vitesse entrant dans un canal à pente critique,
- lors d'une réduction de pente aboutissant à la pente critique.

4.2.4 Canaux horizontaux

1° Les formes que peut prendre la surface libre dans un canal horizontal si

$$J_f = 0 \quad ; \quad h_n = \infty$$

sont résumées sur la Fig. 4.2. La courbe comprend deux branches : H2 et H3.

2° Ici il n'y a pas de profondeur normale, h_n , puisqu'elle devient infinie si la pente de fond est nulle (voir sect. 3.3.2). En conséquence, la branche H1 disparaît.

3° La courbe comporte les deux branches H2 et H3, qui sont les limites des branches M2 et M3 lorsque la pente du canal tend progressivement vers zéro.

La branche H2 se rencontre, par exemple :

- à une chute brusque.

La branche H3 se rencontre, par exemple :

- lors d'un écoulement à grande vitesse entrant dans un canal horizontal.

4.2.5 Canaux à contre-pente

1° Les formes que peut prendre la surface libre dans un canal à contre-pente si

$$J_f < 0$$

sont résumées sur la Fig. 4.2. La courbe comprend deux branches : A2 et A3.

2° Il n'y a pas de profondeur normale, h_n , puisque aucun écoulement uniforme n'est possible (voir sect. 3.3.2). En conséquence, la branche A1 n'existe pas.

3° La courbe est d'allure parabolique, comportant les deux branches, A2 et A3.

La branche A2 se rencontre, par exemple :

- dans un changement brusque de pente.

La branche A3 se rencontre, par exemple :

- à une vanne dont l'ouverture est inférieure à la profondeur critique.

4.3 CALCUL DE LA SURFACE D'EAU

- 1° L'étude précédente a établi l'équation de la surface d'eau (sect. 4.1.2) permettant de préciser l'aspect général des différentes formes de la surface d'eau (sect. 4.2).
- 2° L'intégration de l'équation de la surface d'eau, éq. 4.8, est nécessaire pour procéder aux calculs et à la construction exacte des formes de la surface libre. On peut distinguer trois méthodes :
 - i) la méthode par approximations successives (sect. 4.3.1),
 - ii) la méthode par intégration directe (sect. 4.3.2),
 - iii) la méthode par intégration graphique (sect. 4.3.3).
- 3° Quelle que soit la méthode de calcul adoptée, le résultat ne donnera que la ligne d'eau à une constante près. Il est toutefois évident que la position de cette ligne d'eau n'est pas arbitraire; pour la situer, il s'impose alors obligatoirement de connaître l'un de ses points. Ce sera le point de repère, ou de contrôle, marquant la section de contrôle. Le *point de contrôle* sera généralement calculable à partir des propriétés hydrauliques d'une singularité qui est à l'origine d'un écoulement graduellement varié; cela peut être une chute, un déversoir ou une vanne.

4.3.1 Méthode par approximations successives

- 1° L'équation différentielle, dans sa forme primitive, s'écrivait ainsi :

$$\frac{d}{dx} \frac{(Q/S)^2}{2g} + \frac{dh}{dx} - J_f = -J_e = -\frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h} \quad (4.5)$$

En multipliant le tout par dx , on a :

$$dh = \left(J_f - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_h} \right) dx - \frac{Q^2}{2g} d\left(\frac{1}{S^2}\right) \quad (4.11)$$

On la transforme ensuite en passant des différentielles aux différences finies :

$$(h_{i+1} - h_i) = \left(J_f - \frac{Q^2}{C^2 \bar{S}^2 \bar{R}_h} \right) (x_{i+1} - x_i) - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\bar{S}_{i+1}^2} - \frac{1}{\bar{S}_i^2} \right) \quad (4.12)$$

La profondeur d'eau, h_i , apparaît à l'abscisse, x_i , tandis que la profondeur d'eau très proche, h_{i+1} , à l'abscisse, x_{i+1} , très proche (voir Fig. 4.3).

Les valeurs, $\bar{C}$, $\bar{S}$ et $\bar{R}_h$, correspondent à la valeur moyenne de la profondeur d'eau supposée :

$$\bar{h} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$$

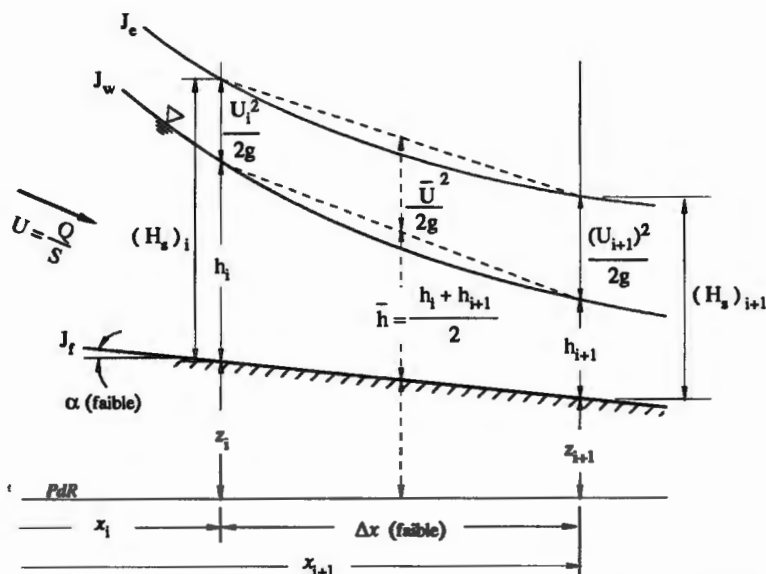


Fig. 4.3 Schéma d'écoulement non uniforme entre deux sections.

L'éq. 4.12 peut aussi s'écrire (voir Silber, 1968, p.26) ainsi :

$$(h + z)_{i+1} - (h + z)_i = \left(- \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_h} \right) (x_{i+1} - x_i) - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{S_{i+1}^2} - \frac{1}{S_i^2} \right) \quad (4.12a)$$

Les deux formes de l'équation de mouvement, éqs. 4.12 ou 4.12a, sont valables pour les canaux prismatiques et pour les canaux non prismatiques, donc également pour les cours d'eau.

Pour les canaux prismatiques, on peut également écrire l'éq. 4.5 ainsi :

$$\frac{d}{dx} (H_s) = J_f - J_e \quad (4.13)$$

où $H_s = (h + U^2/2g)$ est la charge spécifique, éq. 2.14.

En passant des différentielles aux différences finies, on obtient :

$$(H_s)_{i+1} - (H_s)_i = \left(J_f - \frac{\bar{U}^2}{C^2 R_h} \right) (x_{i+1} - x_i) \quad (4.14)$$

où $\bar{U}$ est relevé pour la valeur moyenne supposée.

2° Les équations développées précédemment peuvent être utilisées comme suit pour tracer la surface d'eau :

- i) Pour un tronçon de faible distance, $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$, donnée arbitrairement, on trace la variation de la profondeur, $\Delta h = (h_{i+1} - h_i)$; c'est la méthode des tronçons.
- ii) Pour une légère différence de profondeur, $\Delta h = (h_{i+1} - h_i)$, donnée, on trace la distance, $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$, entre les deux profondeurs; c'est la méthode des variations de profondeur.
- iii) Avant de pouvoir commencer les calculs, il faut établir un (des) *point(s) de contrôle*, où il existe une relation définitive entre le débit et la profondeur d'eau. Un point de contrôle peut être établi dans une section telle que l'entrée ou la sortie d'un canal, un déversoir, une vanne ou une chute (brusque).
- iv) Les calculs se font en se dirigeant vers l'amont pour l'écoulement sous-critique, $Fr < 1$, et vers l'aval pour l'écoulement sur-critique, $Fr > 1$.
- v) Les méthodes par approximations successives sont en général les plus longues à appliquer, mais souvent aussi les plus précises.

3° *Méthode des tronçons* (Δx est fixée) :

Cette méthode par approximations successives s'applique à l'équation du mouvement sous la forme de l'éq. 4.12 ou de l'éq. 4.14.

- i) On suppose connaître une profondeur d'eau, h_i , à une abscisse, x_i .

On *cherche* la profondeur, h_{i+1} , à l'abscisse, x_{i+1} , très proche.

On choisit une première valeur, h'_{i+1} , d'où S'_{i+1} .

On calcule les valeurs, $\bar{C}$, $\bar{S}$ et $\bar{R}_h$, ou $\bar{U}$, qui correspondent toutes à la valeur moyenne supposée, $\bar{h} = (h_i + h_{i+1})/2$.

On porte ces valeurs dans l'équation aux différences, éq. 4.12 ou éq. 4.14, où J_f est la pente de fond du tronçon. On obtient ainsi une valeur pour la profondeur, h_{i+1} , qui sera probablement différente de la valeur choisie, h'_{i+1} .

On recommence par approximations successives jusqu'à ce que la valeur, h_{i+1} , donnée par cette équation soit égale à la dernière valeur choisie, h'_{i+1} , h''_{i+1} , h'''_{i+1}

On passera ensuite au tronçon suivant, etc.

- ii) La méthode (implicite) des tronçons, ou à *pas standard*, est générale, donc valable pour les canaux prismatiques, éq. 4.14, et les canaux non prismatiques, éq. 4.12, d'où la section varie d'un tronçon à l'autre. Néanmoins, il faut signaler que les calculs avec cette méthode sont longs et compliqués (voir *Henderson*, 1966, p. 136 et *Chow*, 1959, p. 265). Une méthode moins longue est proposée par *Prasad* (voir *Ranga-Raju*, 1981, p. 145), qui utilise une méthode d'intégration numérique.
- iii) Pour les *cours d'eau naturels*, il s'avère utile d'évaluer non pas la profondeur d'eau, h , mais la cote de la surface libre, $h = h + z$, car le fond de ces cours d'eau ne varie pas de façon régulière. L'équation du mouvement utilisée, éq. 4.12a, s'écrit alors de la façon suivante :

$$\left(h + z + \frac{Q^2}{2g S^2} \right)_{i+1} - \left(h + z + \frac{Q^2}{2g S^2} \right)_i = - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_h} (x_{i+1} - x_i) - K_{ss} \frac{Q^2}{2g} \left| \frac{1}{S_{i+1}^2} - \frac{1}{S_i^2} \right| \quad (4.12b)$$

où K_{ss} est un coefficient de perte de charge singulière provoquée par un changement entre les sections, S_i et S_{i+1} , et par d'autres irrégularités. On prendra (voir *Silber*, 1968, p. 27) :

pour l'écoulement accéléré : $K_{ss} = 0$

pour l'écoulement décéléré : $0 < K_{ss} < 1$

En utilisant l'éq. 4.12b, les calculs sont longs et compliqués mais ils sont grandement facilités par l'utilisation d'un ordinateur. Cette méthode peut être simplifiée en ne tenant pas compte de l'influence de la variation d'énergie cinétique; les calculs sont moins longs, mais également moins précis. Pour les calculs relatifs aux cours d'eau naturels, de plus amples informations sont données dans les livres de *Chow* (1959, pp. 274-292), de *Crausse* (1951, pp. 171-183) et de *Henderson* (1966, pp. 140-155).

4° Méthode des variations de profondeur (Δh est fixée) :

Cette méthode à *pas directs* s'applique également à l'équation du mouvement sous la forme de l'éq. 4.12 et de l'éq. 4.14.

- i) On suppose connaître la profondeur d'eau, h_i , à une abscisse, x_i .

On *cherche* l'abscisse, x_{i+1} , pour une profondeur, h_{i+1} , très proche.

On choisit la valeur, h_{i+1} , qui est légèrement différente de la valeur, h_i . Pour réduire les erreurs, il convient de resserrer la variation des profondeurs, h_{i+1} et h_i .

On calcule l'abscisse, x_{i+1} , par l'éq. 4.12 ou l'éq. 4.14.

On passera ensuite au tronçon suivant, etc.

ii) Il faut signaler que cette méthode (explicite) est très efficace et moins longue et compliquée que la méthode des tronçons.

5° Les aspects numériques des méthodes par approximations successives sont présentés par *Jansen et al.* (1979, p. 257). Pour différents aspects pratiques tels que les réseaux de rivières ou de canaux, il conviendra de consulter *Jansen et al.* (1979, p. 255), *Chow* (1959, p. 274) et *Henderson* (1966, p. 140).

4.3.2 Méthode par intégration directe

1° Il existe différentes méthodes avec lesquelles on propose de rendre intégrable l'équation différentielle du mouvement, éq. 4.8, en utilisant des fonctions pour représenter les variables.

2° Dans sa forme générale, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 \frac{J_f}{J_c}} \quad (4.8b)$$

où $K(h)$ est la débitance (voir éq. 3.34).

Le calcul et le tracé de la surface d'eau exigent l'intégration de l'expression différentielle, éq. 4.8b. On connaît le débit, Q , la pente de fond, J_f , et le coefficient de frottement, n ou C . Les variables sont l'abscisse, x , et la profondeur d'eau, h , correspondante.

Le membre à droite de l'éq. 4.8b est une fonction de la profondeur, h , de sorte qu'une relation de

$$dx = f(h) dh \quad (4.15)$$

est une équation différentielle à variables séparées. Par intégration entre deux sections, x_i et x_{i+1} , on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \int_{h_{i+1}}^{h_i} f(h) dh \quad (4.16)$$

Il s'avère difficile de résoudre analytiquement cette intégrale, car cette quantité est rarement une expression simple. L'intégration est possible, par exemple, pour le cas d'un canal à section rectangulaire de largeur importante ou dans le cas d'un

canal parabolique; c'est la méthode de *Bresse* ou de *Tolkmitt* respectivement. Pour quelques autres sections du canal, des méthodes ont été développées par *Bakhmeteff* (1932) et par *Chow* (1959).

L'intégration de l'éq. 4.16, ainsi que les méthodes présentées ici, sont directes. Cela veut dire qu'on peut passer d'une section à l'autre quelle que soit la distance entre ces sections (voir Fig. 4.4), ce qui n'est pas le cas avec la méthode par approximations successives (voir sect. 4.3.1) où il faut avancer par petites distances. On trouve évidemment ces avantages dans la méthode par intégration directe.

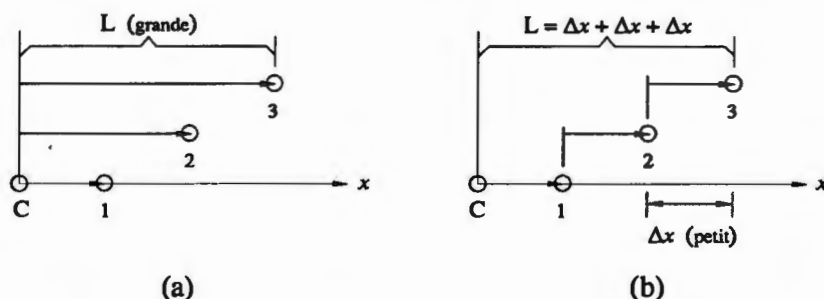


Fig. 4.4 Schéma pour le calcul de la surface d'eau :
a) par intégration directe et b) par approximations successives.

3° Méthode de Bresse :

- i) Pour un canal rectangulaire de largeur infinie – où $h \equiv R_h$, $q = Q/B$ et $B = S/h$ –, on écrit par définition la profondeur normale :

$$h_n^3 = \frac{q^2}{C^2 J_f} \quad (3.36)$$

et la profondeur critique :

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g} \quad (2.24)$$

La débitance, K , du canal est donnée par :

$$K^2 = C^2 R_h S^2 = C^2 h^3 B^2 \quad (3.34)$$

En conséquence, on a ensuite :

$$\left(\frac{h_c}{h_n}\right)^3 = \frac{C^2 J_f}{g} \quad \text{et} \quad \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 = \left(\frac{h_n}{h}\right)^3 \quad (4.17)$$

le coefficient de Chézy, C , étant constant. La pente critique est donnée par :

$$J_c = \frac{g}{C^2} = J_f \left(\frac{h_n}{h_c} \right)^3 \quad (4.9a)$$

ii) L'équation différentielle, éq. 4.8b, s'écrit alors :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h} \right)^3}{1 - \left(\frac{h_n}{h} \right)^3 \frac{J_f}{J_c}} \quad (4.18)$$

Avec la relation pour la pente critique, éq. 4.9a, on obtient :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h} \right)^3}{1 - \left(\frac{h_n}{h_c} \right)^3} \quad (4.8a)$$

À partir d'ici, le lecteur pourrait passer directement à l'éq. 4.25.

Cette relation, déjà présentée (voir sect. 4.1.2), est l'équation de Bresse (1860), valable pour un canal rectangulaire de largeur infinie.

En posant : $h/h_n = \eta$ et $dh = h_n d\eta$

on réécrit l'éq. 4.8a comme suit :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 + \frac{1 - (h_c/h_n)^3}{\eta^3 - 1} \right] h_n d\eta \quad (4.19)$$

iii) En intégrant cette relation entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , à des profondeurs, h_i et h_{i+1} , on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - \left[1 - \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^3 \right] [\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1})] \right\} \quad (4.20)$$

avec l'intégrale de Bresse (voir *Flamant*, 1923, p. 242) :

$$\Phi(\eta, 3) = - \int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} = \frac{1}{6} \log_e \left[\frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

L'expression de cette fonction, $\Phi(\eta, 3)$, est donnée dans le Tableau 4.1 pour $N = 3$; N est l'exposant hydraulique dans l'éq. 4.17.

- iv) La méthode de Bresse est simple et rapide, mais elle se limite aux cours d'eau avec un lit très large par rapport à la profondeur; il est préférable d'utiliser la profondeur moyenne, $D_h \equiv R_h$, plutôt que la profondeur maximale.

4° Méthode de Bakhmeteff :

- i) Alors que la méthode de Bresse est limitée à des canaux rectangulaires de largeur infinie, celle de Bakhmeteff est une des méthodes les plus utilisées pour les canaux à section transversale quelconque.
- ii) Pour un tel canal, la débitance, K , est donnée par :

$$K(h) = f(h) \quad (3.35a)$$

qu'on peut exprimer par une relation exponentielle :

$$K^2 = C^2 R_h S^2 = Cte \cdot h^N$$

ce qui donne le rapport de :

$$\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 = \frac{C^2 R_h S^2}{(C^2 R_h S^2)_n} = \left(\frac{h}{h_n}\right)^N \quad (4.21)$$

On appelle l'exposant, N , (voir *Bakhmeteff*, 1932, p. 84) *exposant hydraulique*, qui est à déterminer pour chaque forme de canal. Voici des valeurs indicatives pour les formes suivantes :

	($B \ll h$)	$N = 2.0$
- forme rectangulaire	($B = 2h$)	$N = 2.5$
	($B = \infty$)	$N = 3.0$
- forme trapézoïdale		$3.0 < N < 4.0$
- forme triangulaire		$5.3 < N < 5.5$
- forme parabolique		$N = 4.0$

On notera que la forme parabolique, étudiée par *Tolkmitt*, peut bien servir comme approximation pour un cours d'eau.

- iii) On suppose que le rapport (voir éq. 4.9) de :

$$\frac{J_f}{J_c} = \beta = J_f \frac{C^2 B R_h}{g S}$$

varie peu en fonction de la profondeur d'eau, h ; par conséquent, il peut être considéré comme une constante dans un tronçon.

- iv) L'équation différentielle, éq. 4.8b, s'écrit alors :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N}{1 - \beta \left(\frac{h_n}{h}\right)^N} \quad (4.22)$$

Cette relation est l'équation de *Bakhmeteff* (1912) - une généralisation de l'équation de Bresse, éq. 4.18, - valable pour un canal de forme quelconque qui est défini par l'exposant hydraulique, éq. 4.21.

En posant : $h/h_n = \eta$ et $dh = h_n d\eta$

on réécrit cette relation, éq. 4.22, comme suit (voir *Bakhmeteff*, 1932, p. 87) :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\eta^N - 1} \right] h_n d\eta \quad (4.23)$$

- v) En intégrant cette relation entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , et en admettant β et N comme constantes, on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta) [\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1})] \right\} \quad (4.24)$$

avec l'intégrale :

$$\Phi(\eta, N) = - \int \frac{d\eta}{\eta^N - 1} \quad (4.24a)$$

Bakhmeteff (1932, pp. 308-313) a fourni des tableaux donnant les valeurs de $\Phi(\eta, N)$ pour différentes valeurs habituelles de N (voir Tableau 4.1). Notons ici que dans le cas où $N = 3$, l'exposant hydraulique est celui qu'on a utilisé dans l'équation de Bresse, éq. 4.8a, où $\Phi(\eta, N) \equiv \Phi(\eta, 3)$.

- vi) *Bakhmeteff* (1932, p. 96) a également proposé une méthode simplifiée dans laquelle on néglige l'influence de la variation d'énergie cinétique. Cela revient à admettre que $\beta = 0$ dans l'éq. 4.24. Toutefois, cette méthode simplifiée n'est recommandée que pour la forme de la surface libre en branche M1.
- vii) L'utilisation de cette méthode ainsi que son application à de multiples problèmes pratiques sont données dans le livre de *Bakhmeteff* (1932).

5° Méthode de Chow :

- i) Dans les méthodes précédentes, on a admis que le ratio de

$$\beta = \frac{J_f}{J_c} = \frac{C^2 B R_h}{g S}$$

reste essentiellement constant; le coefficient de frottement, C ou n , reste donc également constant indépendamment de la profondeur d'eau, h .

La méthode de *Chow* (1959) s'affranchit de cette restriction; on admet que le ratio, β , n'est plus constant.

- ii) L'équation différentielle, éq. 4.8a, peut être généralisée en posant :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^M} \quad (4.25)$$

N est l'exposant hydraulique utilisé dans l'expression de la débitance, éq. 3.35a ; il dépend de la forme de la section et du coefficient de rugosité choisi. M est le deuxième exposant hydraulique. Pour une section de forme quelconque, *Chow* (1959, p. 66 et p. 131) donne :

$$N(h) = \frac{2h}{3S} \left(5B - 2R_h \frac{dP}{dh} \right) \quad (4.26)$$

$$M(h) = \frac{h}{S} \left(3B - \frac{S}{B} \frac{dB}{dh} \right)$$

Les deux exposants hydrauliques sont fonction de la profondeur d'eau, h .
Les variations usuelles sont : $2.0 < N < 5.3$ et $3 < M < 4.8$.

En posant : $h/h_n = \eta$ et $dh = h_n d\eta$

l'éq. 4.25 peut être exprimée par :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 - \left(\frac{1}{1-\eta} \right) + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \left(\frac{\eta^{N-M}}{1-\eta} \right) \right] h_n d\eta \quad (4.27)$$

En mettant $N = M = 3$, l'éq. 4.27 devient la relation de Bresse, éq. 4.19, valable pour un canal rectangulaire de largeur infinie.

iii) En intégrant entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - \int_0^{\eta} \left(\frac{1}{1-\eta^N} \right) d\eta + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \int_0^{\eta} \left(\frac{\eta^{N-M}}{1-\eta^N} \right) d\eta \right\} \quad (4.28)$$

La première intégrale est :

$$\Phi(\eta, N) = \int \left(\frac{1}{1-\eta^N} \right) d\eta = - \int \left(\frac{1}{\eta^N - 1} \right) d\eta \quad (4.24a)$$

étant identique à celle qu'on trouve dans la relation de *Bakhmeteff*, éq. 4.24.

La deuxième intégrale peut être transposée (voir *Chow*, 1959, p. 255) par substitution :

$$\int_0^{\eta} \left(\frac{\eta^{N-M}}{1-\eta^N} \right) d\eta = \frac{J}{N} \int_0^{\zeta} \left(\frac{1}{1-\zeta^J} \right) d\zeta = \frac{J}{N} \Phi(\zeta, J) \quad (4.28a)$$

où $\zeta = \eta^{N/J}$ et $J = N/(N-M+1)$. La fonction, $\Phi(\zeta, J)$, est semblable à la fonction, $\Phi(\eta, N)$; les variables, η et N , sont remplacées par les variables, ζ et J ; on utilise donc les tabulations du Tableau 4.1 pour les deux fonctions, éq. 4.24a et 4.28a.

iv) Avec la définition de ces deux fonctions, l'éq. 4.28 s'écrit ainsi :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - [\Phi(\eta_i, N) - \Phi(\eta_{i+1}, N)] + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \frac{J}{N} [\Phi(\zeta_i, J) - \Phi(\zeta_{i+1}, J)] \right\} \quad (4.29)$$

v) L'utilisation de cette méthode ainsi que son application à des problèmes pratiques sont données par *Chow* (1959, pp. 252-262).

Tableau 4.1 Fonctions pour les écoulements graduellement variés.

$$\Phi(\eta, N) = - \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^{N-1}}$$

La constante de l'intégration est ajustée pour

$$\Phi(0, N) = 0 \text{ et } \Phi(\infty, N) = 0$$

$\eta \backslash N$	2.8	3.0	3.2	3.6	4.0	5.0
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.20	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.30	0.303	0.302	0.302	0.301	0.300	0.300
0.40	0.408	0.407	0.405	0.403	0.402	0.401
0.44	0.452	0.450	0.448	0.445	0.443	0.441
0.48	0.497	0.494	0.492	0.488	0.485	0.482
0.52	0.544	0.540	0.536	0.531	0.528	0.523
0.56	0.593	0.587	0.583	0.576	0.572	0.565
0.58	0.618	0.612	0.607	0.599	0.594	0.587
0.60	0.644	0.637	0.631	0.623	0.617	0.608
0.61	0.657	0.650	0.644	0.635	0.628	0.619
0.62	0.671	0.663	0.657	0.647	0.640	0.630
0.63	0.684	0.676	0.669	0.659	0.652	0.641
0.64	0.698	0.690	0.683	0.672	0.664	0.652
0.65	0.712	0.703	0.696	0.684	0.676	0.663
0.66	0.727	0.717	0.709	0.697	0.688	0.675
0.67	0.742	0.731	0.723	0.710	0.701	0.686
0.68	0.757	0.746	0.737	0.723	0.713	0.698
0.69	0.772	0.761	0.751	0.737	0.726	0.710
0.70	0.787	0.776	0.766	0.750	0.739	0.722
0.71	0.804	0.791	0.781	0.764	0.752	0.734
0.72	0.820	0.807	0.796	0.779	0.766	0.746
0.73	0.837	0.823	0.811	0.793	0.780	0.759
0.74	0.854	0.840	0.827	0.808	0.794	0.771
0.75	0.872	0.857	0.844	0.823	0.808	0.784
0.76	0.890	0.874	0.861	0.839	0.823	0.798
0.77	0.909	0.892	0.878	0.855	0.838	0.811
0.78	0.929	0.911	0.896	0.872	0.854	0.825
0.79	0.949	0.930	0.914	0.889	0.870	0.839
0.80	0.970	0.950	0.934	0.907	0.887	0.854
0.81	0.992	0.971	0.954	0.925	0.904	0.869
0.82	1.015	0.993	0.974	0.945	0.922	0.885
0.83	1.039	1.016	0.996	0.965	0.940	0.901
0.84	1.064	1.040	1.019	0.985	0.960	0.918
0.85	1.091	1.065	1.043	1.007	0.980	0.935
0.86	1.119	1.092	1.068	1.031	1.002	0.954
0.87	1.149	1.120	1.095	1.055	1.025	0.973
0.88	1.181	1.151	1.124	1.081	1.049	0.994
0.89	1.216	1.183	1.155	1.110	1.075	1.015
0.90	1.253	1.218	1.189	1.140	1.103	1.039
0.91	1.294	1.257	1.225	1.173	1.133	1.064
0.92	1.340	1.300	1.266	1.210	1.166	1.092
0.93	1.391	1.348	1.311	1.251	1.204	1.123
0.94	1.449	1.403	1.363	1.297	1.246	1.158
0.95	1.518	1.467	1.423	1.352	1.296	1.199
0.96	1.601	1.545	1.497	1.417	1.355	1.248
0.97	1.707	1.644	1.590	1.501	1.431	1.310
0.98	1.855	1.783	1.720	1.617	1.536	1.395
0.99	2.106	2.017	1.940	1.814	1.714	1.537
0.995	2.355	2.250	2.159	2.008	1.889	1.678

$\eta \backslash N$	2.8	3.0	3.2	3.6	4.0	5.0
1.005	1.818	1.649	1.506	1.279	1.107	0.817
1.01	1.572	1.419	1.291	1.089	0.936	0.681
1.02	1.327	1.191	1.078	0.900	0.766	0.546
1.03	1.186	1.060	0.955	0.790	0.668	0.469
1.04	1.086	0.967	0.868	0.714	0.600	0.415
1.05	1.010	0.896	0.802	0.656	0.548	0.374
1.06	0.948	0.838	0.748	0.608	0.506	0.342
1.07	0.896	0.790	0.703	0.569	0.471	0.315
1.08	0.851	0.749	0.665	0.535	0.441	0.292
1.09	0.812	0.713	0.631	0.506	0.415	0.272
1.10	0.777	0.681	0.601	0.480	0.392	0.254
1.11	0.746	0.652	0.575	0.457	0.372	0.239
1.12	0.718	0.626	0.551	0.436	0.354	0.225
1.13	0.692	0.602	0.529	0.417	0.337	0.212
1.14	0.669	0.581	0.509	0.400	0.322	0.201
1.15	0.647	0.561	0.490	0.384	0.308	0.191
1.16	0.627	0.542	0.473	0.369	0.295	0.181
1.17	0.608	0.525	0.458	0.356	0.283	0.173
1.18	0.591	0.509	0.443	0.343	0.272	0.165
1.19	0.574	0.494	0.429	0.331	0.262	0.157
1.20	0.559	0.480	0.416	0.320	0.252	0.150
1.22	0.531	0.454	0.392	0.299	0.235	0.138
1.24	0.505	0.431	0.371	0.281	0.219	0.127
1.26	0.482	0.410	0.351	0.265	0.205	0.117
1.28	0.461	0.391	0.334	0.250	0.193	0.108
1.30	0.442	0.373	0.318	0.237	0.181	0.100
1.32	0.424	0.357	0.304	0.225	0.171	0.093
1.34	0.408	0.342	0.290	0.214	0.162	0.087
1.36	0.393	0.329	0.278	0.204	0.153	0.081
1.38	0.378	0.316	0.266	0.194	0.145	0.076
1.40	0.365	0.304	0.256	0.185	0.138	0.071
1.42	0.353	0.293	0.246	0.177	0.131	0.067
1.44	0.341	0.282	0.236	0.169	0.125	0.063
1.46	0.330	0.273	0.227	0.162	0.119	0.059
1.48	0.320	0.263	0.219	0.156	0.113	0.056
1.50	0.310	0.255	0.211	0.149	0.108	0.053
1.60	0.269	0.218	0.179	0.123	0.087	0.040
1.70	0.236	0.189	0.153	0.103	0.072	0.031
1.80	0.209	0.166	0.133	0.088	0.060	0.024
1.90	0.188	0.147	0.117	0.076	0.050	0.020
2.00	0.169	0.132	0.104	0.066	0.043	0.016
2.20	0.141	0.107	0.083	0.051	0.032	0.011
2.40	0.119	0.089	0.068	0.040	0.024	0.008
2.60	0.102	0.076	0.057	0.033	0.019	0.005
2.80	0.089	0.065	0.048	0.027	0.015	0.004
3.00	0.078	0.056	0.041	0.022	0.012	0.003
3.50	0.059	0.041	0.029	0.015	0.008	0.002
4.00	0.046	0.031	0.022	0.010	0.005	0.001
5.00	0.031	0.020	0.013	0.006	0.003	0.000
10.00	0.009	0.005	0.003	0.001	0.000	0.000

4.3.3 Méthode par intégration graphique

- 1° L'équation du mouvement pour un canal prismatique de section quelconque s'écrit dans sa forme générale :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \frac{(Q/S)^2}{C^2 R_h J_f}}{1 - \frac{(Q/S)^2}{gS/B}} \quad (4.8)$$

Cette équation prend une forme simplifiée qu'on peut écrire ainsi :

$$dx = f(h) dh \quad (4.15)$$

La fonction, $f(h)$, a une forme qu'il est en général difficile d'intégrer. Les paramètres $S(h)$, $R_h(h)$, $B(h)$ et $C(h)$ ne peuvent pas être exprimés au moyen d'une fonction analytique simple de la profondeur d'eau, h .

- 2° Différentes méthodes par intégration analytique ont été présentées ci-dessus (voir sect. 4.3.2). Il existe également plusieurs méthodes par intégration graphique de l'équation différentielle, éq. 4.8 ou éq. 4.15.

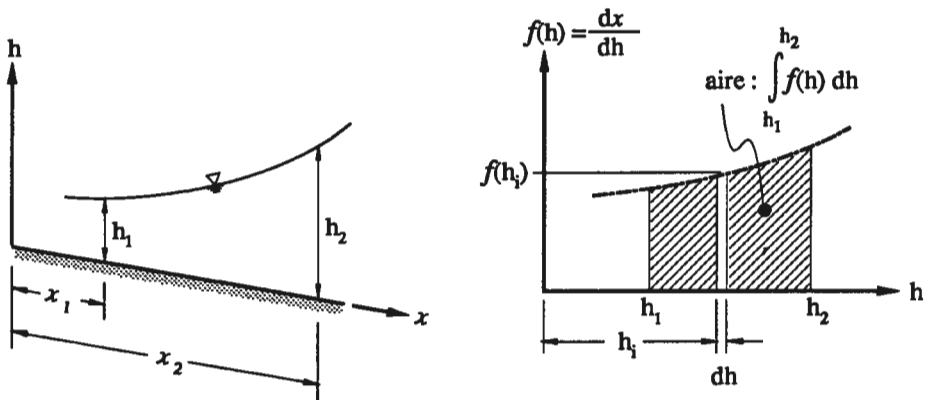


Fig. 4.5 Schéma de la méthode par intégration graphique.

- 3° *Méthode directe :*

- i) On calcule et on établit la fonction, $f(h_i)$, pour différentes valeurs de la profondeur, h_i .

On trace (voir Fig. 4.5) cette courbe de $f(h)$ en fonction de h .

L'aire comprise entre cette courbe, $f(h)$, l'axe des h et les deux droites d'abscisses, h_1 et h_2 , donne la distance, $(x_2 - x_1)$, qui sépare les deux sections. On l'écrit :

$$(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{h_1}^{h_2} f(h) dh \quad (4.16)$$

- ii) La configuration des courbes donnant les formes de surface d'eau pour la pente faible, M , et la pente forte, s , est donnée schématiquement sur la Fig. 4.6 (voir aussi Fig. 4.2).
- iii) Cette méthode est assez rigoureuse, mais peut s'avérer longue pour obtenir la forme complète de la surface d'eau. La méthode est également utile pour les canaux non prismatiques (voir *Chow*, 1959, p. 249).

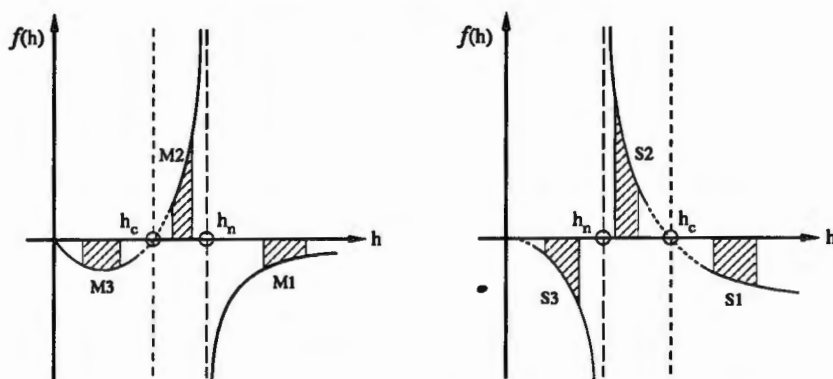


Fig. 4.6 Les formes de surface d'eau; représentation schématique de la fonction, $f(h)$, de l'éq. 4.15.

- 4° Il existe d'autres méthodes graphiques; deux d'entre elles sont à mentionner : la méthode de Raytchine et Châtelain, qui est exposée dans *Carlier* (1972, p. 380) et la méthode de Silber, également résumée dans *Carlier* (1972, p. 382).
- 5° Dans la méthode de *Silber* (1968), deux variables adimensionnelles sont introduites, notamment une profondeur réduite et un débit unitaire réduit :

$$h^* = \frac{h}{H_s} \quad \text{et} \quad q^* = \frac{Q}{BH_s \sqrt{2gH_s}}$$

C'est ainsi qu'on utilise le concept de l'énergie spécifique, H_s (voir sect. 2.3).

La courbe correspondante, $q^* = f(h^*)$, constitue la caractéristique universelle pour les écoulements graduellement variés à surface libre; elle est en outre d'une grande utilité pour de nombreux problèmes dans les canaux artificiels et naturels.