

Stabilité des systèmes linéaires asservis

1.0

Septembre 2025

Dr. Guentri Hocine
Centre universitaire Nour Bachir El bayadh
Institut de technologie
Département de génie électrique
Email : h.guentri@cu-elbayadh.dz

Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale :
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/fr/>

Table des matières

I - Stabilité des systèmes linéaires asservis	3
1. CRITÈRE MATHÉMATIQUE DE STABILITÉ	3
1.1. Énoncé du critère de stabilité.....	3
2. CRITÈRE ALGÈBRIQUE DE ROUTH.....	4
2.1. Principe.....	4
2.2. Exemple.....	5
3. CRITÈRE DE NYQUIST.....	6
3.1. <i>Exemple</i>	6
4. CRITÈRE DE NYQUIST SIMPLIFIÉ (CRITÈRE DU REVERS)	8
5. MARGES DE STABILITÉ.....	9
5.1. critère de stabilité utilisant les courbes de bode.....	9

I Stabilité des systèmes linéaires asservis

1. CRITÈRE MATHÉMATIQUE DE STABILITÉ

1.1. Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 5.1. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

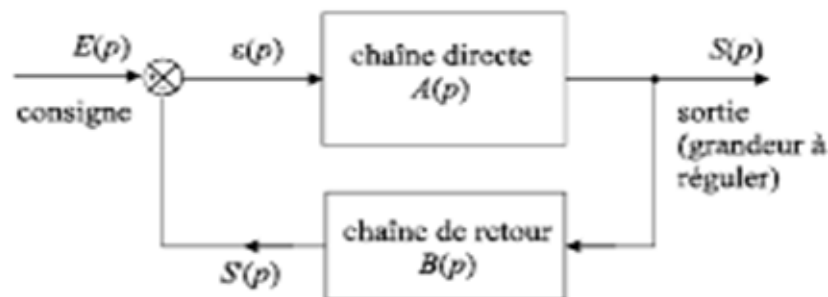


Figure 5.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Les p_i sont les n pôles de $H(p)$. Les z_j sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \cdot \prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels r_i et ceux correspondant à des pôles complexes $\tau_k + j\omega_k$:

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)}$$

La transformée inverse de $S(p)$ est:

$$S(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif r_i introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

Par ailleurs, les termes peuvent s'écrire :

$$b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k e^{\tau_k t} e^{j\omega_k t}$$

Les termes de ce type ne peuvent converger vers une valeur finie que si la partie réelle τ_k des pôles correspondant est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

2. CRITÈRE ALGÈBRE DE ROUTH

2.1. Principe

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée et soit $D(p)$ le dénominateur de $H(p)$. $D(p)$ est un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p^1 + a_0$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients a_i dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	a_1
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	a_0
$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-2}a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\dots$	$\frac{a_{n-1}a_1 - a_n a_0}{a_{n-1}}$	$\dots$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_1 & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_0 & \\
 b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_0 & 0 &
 \end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \dots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \dots & a_0 \\
 b_n & & b_{n-1} & & b_{n-2} & b_0 & 0 \\
 \hline
 \frac{b_n a_{n-3} - a_{n-1} b_{n-1}}{b_n} & \frac{b_n a_{n-5} - a_{n-1} b_{n-2}}{b_n} & \dots & & & &
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 sur la ligne.

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $H(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Remarque : Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynôme $D(p)$, autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

2.2. Exemple

Soit un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire (figure 5.2).

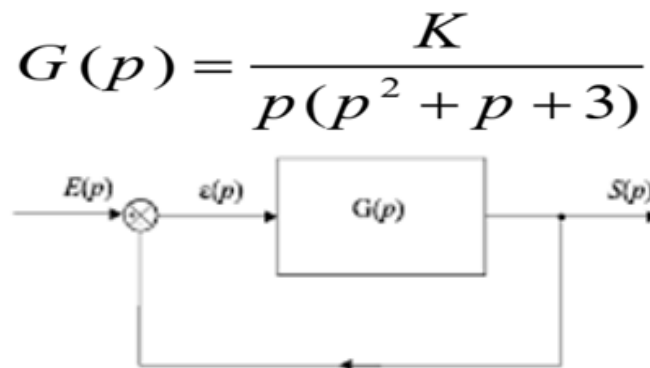


Figure 5.2 Boucle de régulation étudiée

Calculons sa fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{K}{p(p^2+p+3)}}{1+\frac{K}{p(p^2+p+3)}} = \frac{K}{p(p^2+p+3)+K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p(p^2+p+3)+K = p^3+p^2+3p+K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

1	3
1	K
3 - K	0
K	0

Remarque : Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que $3-K > 0$.

Le système est donc stable si $K < 3$.

3. CRITÈRE DE NYQUIST

Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un système asservi linéaire est que son lieu de transfert en boucle ouverte, parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, entoure le point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Étant donné un système asservi, défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p) = A(p).B(p)$.

La relation : $Z = P - N$ donne le nombre Z de zéros instables de l'équation caractéristique

$1 + FTBO(p) = 0$ et donc de pôles instables de la FTBF(p), avec :

- P : Nombre de pôles instables de la FTBO(p),
- N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$) autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique (sens anti-horaire).

En particulier, le système asservi est stable, à condition que : $Z = 0 \rightarrow P = N$

En pratique, on retiendra les étapes suivantes pour appliquer le critère de Nyquist :

- Étudier la stabilité de la FTBO $\rightarrow P$: nombre de pôles instables de la FTBO.
- Tracer le lieu de Nyquist complet de la FTBO (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$).
- Calculer le nombre de tours (comptés algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N , que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$), autour du point critique $(-1,0)$.
- En déduire $Z = P - N$ = nombre de pôles instables de la FTBF.

3.1. Exemple

Soit un système asservi à retour unitaire dont la FTBO est :

$$G(p) = \frac{K}{1 - Tp} \quad (T > 0)$$

Discutons sa stabilité suivant les valeurs de K .

· **$K > 0$** (fig. 5-3)

- La FTBO(p) a un pôle instable $p = +1/T$.

→ $P = 1$

- Le nombre de tours autour du point $(-1,0)$ est :

→ $N = 0$

$$Z = P - N = 1 \neq 0$$

1 pôle instable de la FTBF

→ Système instable en boucle fermée.

- Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

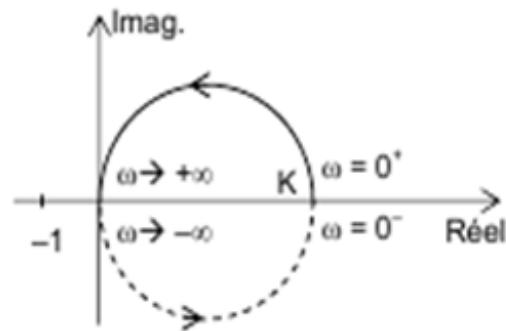


Fig. 5-3

· **$K < -1$** (fig. 5-4)

- $P = 1$
- $N = +1$
- $Z = P - N = 0$
- Pas de pôle instable de la FTBF

→ Système stable en boucle fermée.

ü Ce système est instable en boucle ouverte et stable en boucle fermée.

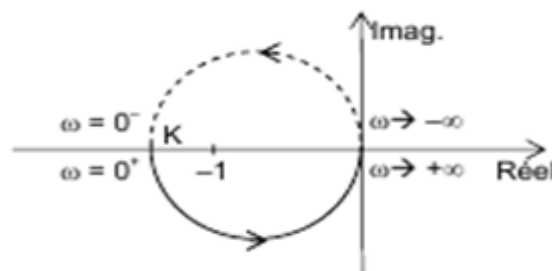


Fig. 5-4

· **$-1 < K < 0$** (fig. 5-5)

- $P = 1$
- $N = 0$
- $Z = P - N = 1$
- 1 pôle instable de la FTBF

→ Système instable en boucle fermée.

- Ce système est instable en boucle ouverte et instable en boucle fermée.

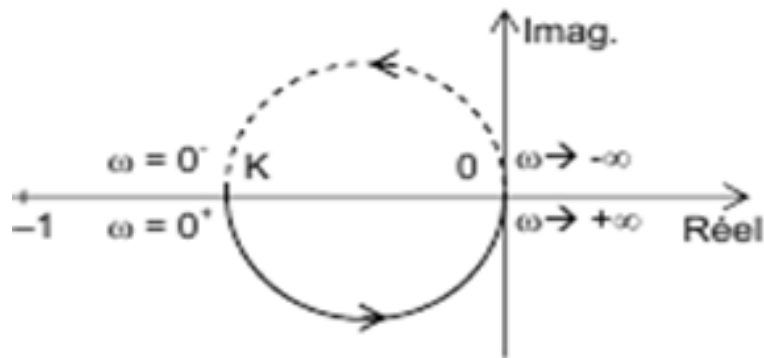


Fig. 5-5

Vérification la stabilité par le critère de Routh :

Vérification la stabilité par le critère de Routh :

$$FTBO(p) = \frac{K}{1 - Tp} \rightarrow FTBF(p) = \frac{K}{1 + K - Tp}$$

Équation caractéristique : $-Tp + 1 + K = 0$

p^1 : $-T$

p^0 : $1+K$

Pour que le système soit stable, il faudrait que : $1 + K < 0 \rightarrow K < -1$

4. CRITERE DE NYQUIST SIMPLIFIE (CRITERE DU REVERS)

Il est déduit du critère de Nyquist :

Un système stable en Boucle Ouverte, est stable en Boucle Fermée, si le tracé du lieu de Nyquist de la FTBO, décrit dans le sens des pulsations croissantes (ω variant de 0 à $+\infty$), laisse le point critique $(-1,0)$ à sa gauche. Il est instable dans le cas contraire.

Le critère du Revers est d'un emploi plus commode que le critère de Nyquist, car il ne met en œuvre que le lieu physique de la FTBO (correspondant aux pulsations positives).

Par contre, le critère du Revers est moins général, et il ne peut s'appliquer sans danger que lorsque la notion de "gauche" n'est pas ambiguë (Fig. 5-6).

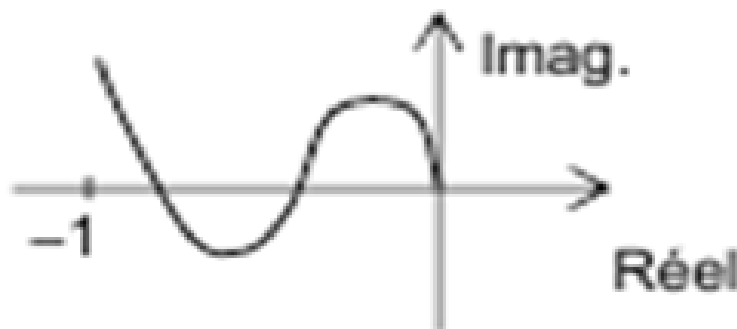


Fig. 5-6 : Cas d'ambiguïté dans l'application du critère du revers.

5. MARGES DE STABILITE

Pour un système stable en Boucle Ouverte, nous venons de voir que la stabilité en Boucle Fermée dépend de la position du lieu de Nyquist de la FTBO par rapport au point critique $(-1,0)$.

De façon à quantifier le degré de stabilité d'un système asservi, il est donc utile de chiffrer la distance entre le lieu de Nyquist et le point critique $(-1, 0)$. La mesure effective de la distance minimum n'étant pas chose aisée d'un point de vue mathématique, on préfère, de manière traditionnelle, évaluer indirectement cette distance par les mesures des marges de phases $\Delta\varphi$ et de gain ΔG . Ces marges représentent des marges de sécurité par rapport à l'état instable.

Ces grandeurs sont définies de la manière suivante :

· La marge de phase $\Delta\varphi$ d'un système est mathématiquement la différence entre la phase de FTBO(ω_{c0}) c'est-à-dire $\varphi(\omega_{c0})$, et -180° : $\Delta\varphi = \varphi(\omega_{c0}) + 180^\circ$

La marge de phase permet de préserver la stabilité en dépit de la présence de retards parasites – par exemple dus à la transmission des signaux – dont on n'a pas tenu compte au moment de l'étude de la stabilité.

La marge de gain ΔG a pour expression :

$$\Delta G = \frac{1}{|FTBO(\omega_\pi)|}$$

Elle permet de préserver la stabilité en dépit des fluctuations de gain, qui affectent, en particulier, les amplificateurs de la chaîne de puissance.

Pour qu'un système soit stable, il faudrait que : $\Delta\varphi > 0$ et $\Delta G > 0$.

5.1. critère de stabilité utilisant les courbes de bode.

a) Marge de gain

On définit la marge de gain par :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi)$$

Cette définition permet de chiffrer une marge gain en décibels d'autant plus importante que le système est stable.

On a : $0 < \Delta G < +\infty$

Plus ΔG est grand, plus le système est stable.

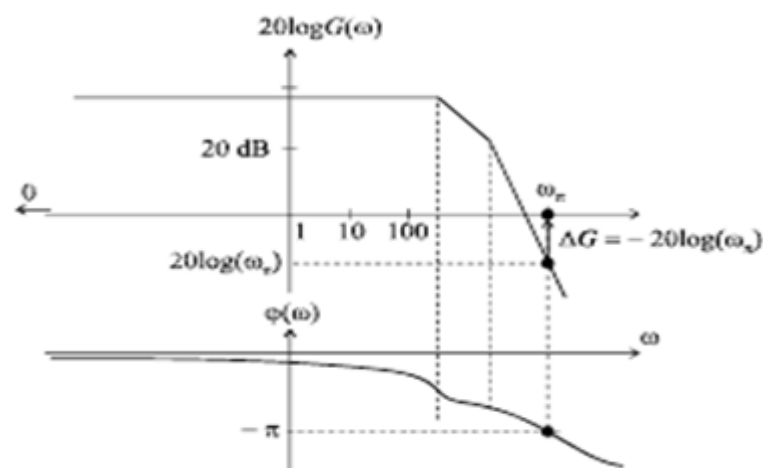


Figure 5.7 Mise en évidence de la marge de gain sur le diagramme de Bode.

Remarque : Il est possible de localiser la mesure de la marge de gain sur le diagramme de Bode. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de phase, la pulsation correspondant au déphasage égal à $-\pi$, puis, dans le diagramme de gain, à cette pulsation, de mesurer ΔG , directement en décibels (figure 5.7).

i) **Exemple :**

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_π , puis à calculer $\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi)$.

ω_π est telle que : $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$

On a :

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(j \frac{\omega}{100} + 1\right)^3}$$

Donc :

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi \Rightarrow -3 \arctan \frac{\omega_\pi}{100} = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 100 \tan \frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3}$$

On a alors

$$\Delta G = -20 \log G(100\sqrt{3})$$

$$\Delta G = -20 \log \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_\pi^2}{10^4}} + 1\right)^3} = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{3} + 1)^3} = -20 \log \frac{5}{8}$$

$$\Delta G = 4dB$$

b) Marge de phase

Comme :

$$\varphi(\omega_{c0}) - \Delta\varphi = -\pi$$

On a :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$$

Remarque : Il est possible de localiser la mesure de la marge de phase sur le diagramme de Bode. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de gain, la position de la pulsation de coupure à 0 dB puis, dans le diagramme de phase, à cette pulsation, de mesurer la marge de phase comme l'écart entre $-\pi$ et le déphase correspondant (figure 5.8)

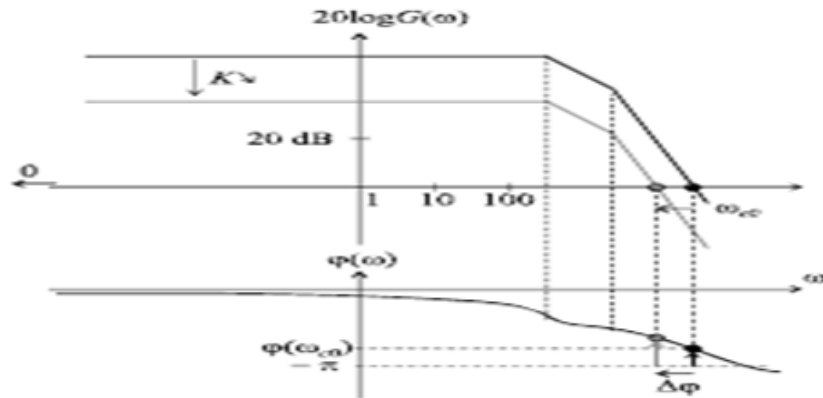


Figure 5.8 Marge de phase mesurée sur la diagramme de Bode.

Remarque : En général, la marge de phase est exprimée en degrés. On considère qu'une marge de phase supérieure à 45° correspond à une bonne stabilité.

i) **Exemple :**

Considérons à nouveau le système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de phase consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_{c0} puis à calculer $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$.

ω_{c0} est telle que : $G(\omega_{c0}) = 1$

On a : $G(j\omega) = \frac{5}{\left(j\frac{\omega}{100} + 1\right)^3}$

$$\text{De plus : } G(\omega_{c0}) = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1}\right)^3} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1} = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \omega_{c0}^2 = 10^4 \left[(\sqrt[3]{5})^2 - 1 \right]$$

$$\omega_{c0} = 139 \text{ rad/s}$$

On a alors : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$

Comme : $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$

On a : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{139}{100} = 0.3 \text{ rad} = 17^\circ$