

– Correction de l'examen final –

Spécialité : Ressources en eau, M1 - S1

Module : Les écoulements à surface libre

Solution de l'exercice 1

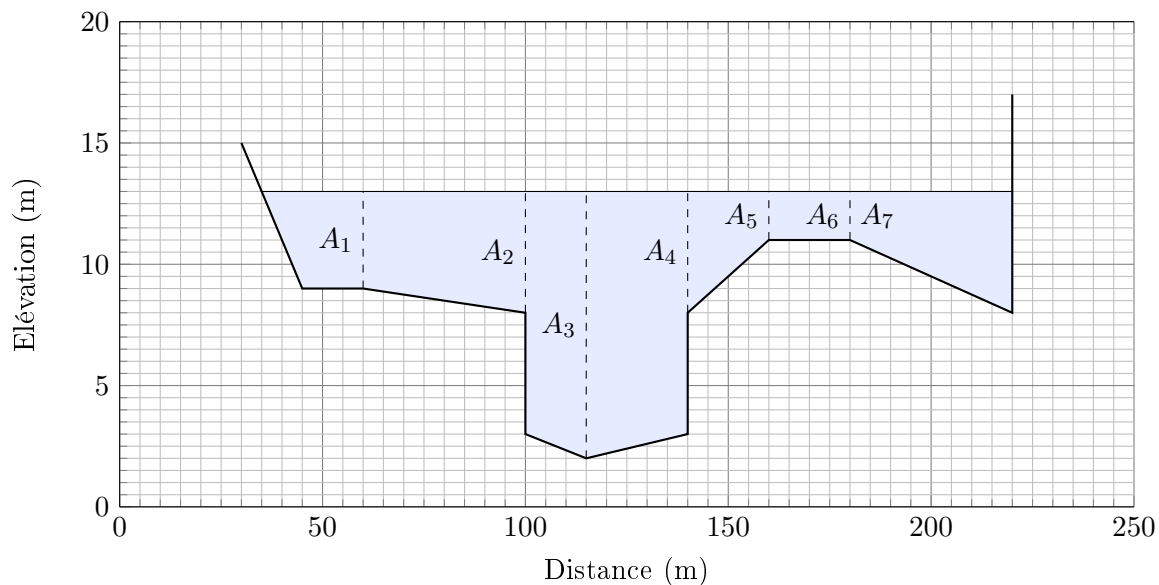


FIGURE S1

[0,5 Pts]

La section mouillée : $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$

$$A = \frac{15+25}{2} \cdot 4 + \frac{4+5}{2} \cdot 40 + \frac{11+5}{2} \cdot 15 + \frac{11+5}{2} \cdot 25 + \frac{5+2}{2} \cdot 20 + \frac{2+5}{2} \cdot 40; \quad A = 790 \text{ m}^2 \quad [1 \text{ Pts}]$$

Le périmètre mouillé :

$$P_w = \sqrt{10^2 + 4^2} + 15 + \sqrt{40^2 + 1^2} + 5 + \sqrt{15^2 + 1^2} + \sqrt{25^2 + 1^2} + 5 + \sqrt{20^2 + 3^2} + 20 + \sqrt{40^2 + 3^2} \\ P_w = 191,17 \text{ m} \quad [1 \text{ Pts}]$$

Le rayon hydraulique : $R_h = \frac{A}{P_w} = \frac{790}{191,17}; \quad R_h = 4,132 \text{ m} \quad [0,5 \text{ Pts}]$

La largeur en surface : $T = 220 - 35; \quad T = 185 \text{ m} \quad [0,5 \text{ Pts}]$

La profondeur hydraulique : $D = \frac{A}{T} = \frac{790}{185}; \quad D = 4,27 \text{ m} \quad [0,5 \text{ Pts}]$

Le débit : $Q = \frac{A}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{790}{0,013} \cdot 4,132^{2/3} \times 0,0002^{1/2}; \quad Q = 2213 \text{ m}^3/\text{s} \quad [0,5 \text{ Pts}]$

La vitesse moyenne : $V = \frac{Q}{A} = \frac{2213}{790}$; $V = 2,8 \text{ m/s}$ [0,5 Pts]

L'énergie totale : $E = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} = 2 + 11 + 1 \frac{2,8^2}{2 \times 9,81}$; $E = 13,4 \text{ m}$ [0,5 Pts]

Solution de l'exercice 2

Données : $b = 4,0 \text{ m}$, $m = 2$, $Q = 23,03 \text{ m}^3/\text{s}$, $S_0 = 0,001 \text{ m/m}$ et $n = 0,017$

Pour déterminer le type de courbe de la ligne d'eau, il faut calculer y_n et y_c . Ces deux profondeurs seront déterminées graphiquement [0,5 Pts]

Pour y_n , nous avons : $\frac{nQ}{\sqrt{S_0} b^{8/3}} = \frac{0,017 \times 23,03}{\sqrt{0,001} \times 4^{8/3}} = 0,3$

À partir de la courbe "Détermination de la profondeur normale des canaux de section rectangulaire et trapézoïdale", la valeur de $\frac{y_n}{b} = 0,4$ donc, $y_n = 0,4 \times b$, $y_n = 1,6 \text{ m}$. [1 Pts]

Pour y_c , nous avons : $\frac{Qm^{1,5}}{g^{0,5}b^{2,5}} = \frac{23,03 \times 2^{1,5}}{9,81^{0,5} \times 4^{2,5}} \approx 0,65$

À partir de la courbe "Détermination de la profondeur critique des canaux de section trapézoïdale", la valeur de $\frac{my_c}{b} = 0,6$ donc, $y_c = \frac{0,6 \times 4}{2}$, $y_c = 1,2 \text{ m}$. [1 Pts]

Comme $y_c < y_n$, l'écoulement est à pente faible. La ligne de la surface d'eau sera donc une courbe de type **M**. [1 Pts]

1. Pour $y = 1,8 \text{ m}$, $y > y_n > y_c$; la forme de la surface d'eau est de type de branche **M1**. [0,5 Pts]
2. Pour $y = 1,4 \text{ m}$, $y_n > y > y_c$; la forme de la surface d'eau est de type de branche **M2**. [0,5 Pts]
3. Pour $y = 1,0 \text{ m}$, $y_n > y_c > y$; la forme de la surface d'eau est de type de branche **M3**. [0,5 Pts]

Solution de l'exercice 3

1) Démonstration

Nous avons : $\frac{Q^2}{gA_1} + A_1 y_{G_1} = \frac{Q^2}{gA_2} + A_2 y_{G_2}$

Pour un canal rectangulaire : $\frac{Q^2}{gby_1} + b \frac{y_1^2}{2} = \frac{Q^2}{gby_2} + b \frac{y_2^2}{2}$

En divisant par $\frac{2}{b}$, on obtient :

$$\frac{2Q^2}{gb^2 y_1} + y_1^2 = \frac{Q^2}{gb^2 y_2} + y_2^2 \Rightarrow y_2^2 - y_1^2 = \frac{2Q^2}{gb^2} \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) \Rightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = \frac{2Q^2}{gb^2} \frac{(y_2 - y_1)}{y_1 y_2}$$

En posant $q = \frac{Q}{b}$ (débit unitaire) et en simplifiant, on obtient :

$$y_1 y_2^2 + y_1^2 y_2 - \frac{2q^2}{g} = 0 \quad (\text{S3.a})$$

L'éq. (S3.a) est une équation de deuxième degré en y_2 . La racine positive est :

$$y_2 = \frac{-y_1^2 + \sqrt{y_1^4 + 8q^2 y_1 / g}}{2y_1}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[-y_1 + \sqrt{y_1^2 \left(1 + \frac{8q^2}{gy_1^3} \right)} \right] = \frac{1}{2} \left[-y_1 + y_1 \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gy_1^3}} \right]$$

$$\therefore \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gy_1^3}} \right]$$

$$\text{Nous avons : } \left(\frac{q^2}{gy_1^3} \right) = \frac{V_1^2 y_1^2}{gy_1^3} = \frac{V_1^2}{gy_1} = \left(\frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} \right)^2 = \text{Fr}^2$$

Donc :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right]$$

En résolvant l'éq. (S3.a) par rapport à y_1 , on obtient :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\text{Fr}_2^2} - 1 \right] \quad [2 \text{ Pts}]$$

2.i) Vérification

Le nombre de *Froude* : $\text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{8}{\sqrt{9,81 \times 0,5}} = 3,612 > 1$, l'écoulement est torrentiel donc le ressaut existe [1 Pts]

2.ii) Le type de ressaut attendu

$2,5 < \text{Fr}_1 < 4,5$, donc le ressaut est oscillant [1 Pts]

2.iii) La profondeur conjuguée du ressaut

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right] \Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} - 1 \right] = \frac{0,5}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \times 3,612^2} - 1 \right];$$

$$y_2 = 2,32 \text{ m} \quad [1 \text{ Pts}]$$

2.iii) La hauteur du ressaut

$$a = y_2 - y_1 = 2,32 - 0,5; \quad a = 1,82 \text{ m} \quad [1 \text{ Pts}]$$

2.iv) La longueur du ressaut

$$5 < L_r/(y_2 - y_1) < 7, \text{ prenant : } L_r = 6(y_2 - y_1) = 6(2,32 - 0,5); \quad L_r = 10,9 \text{ m} \quad [1 \text{ Pts}]$$

2.v) La perte d'énergie due au ressaut

$$\Delta H_s = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} = \frac{(2,32 - 0,5)^3}{4 \times 2,32 \times 0,5}; \quad \Delta H_s = 1,29 \text{ m} \quad [1 \text{ Pts}]$$

2.vi) Le nombres de *Froude* après le ressaut

$$\text{Nous avons : } \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8\text{Fr}_2^2} - 1 \right] \Rightarrow \text{Fr}_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{2y_1}{y_2} \right)^2 - 1}{8}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2 \times 0,5}{2,32} \right)^2 - 1}{8}}; \quad \text{Fr}_2 = 0,36 \quad [1 \text{ Pts}]$$

On peut aussi utiliser l'éq. de continuité (canal rectangulaire de largeur fixe) :

$$Q = V_1 b y_1 = V_2 b y_2 \Rightarrow V_2 = \frac{y_1}{y_2} V_1 = \frac{0,5}{2,32} 8 = 1,73 \text{ m/s}$$

$$\text{et } \text{Fr}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{1,73}{\sqrt{9,81 \times 2,32}} = 0,36,$$