République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Nour Bachir — El Bayadh
Institut de Technologie
Département de Génie Électrique

Modélisation des Machines Électriques

Support de cours et travaux dirigés

Élément	Valeur
Unité d'enseignement	UE Fondamentale — UEF 1.2.1
Matière	Modélisation des machines électriques
Volume horaire (VHS)	45 h (Cours : 1h30 ; TD : 1h30)
Crédits	4
Coefficient	2
Niveau	Master — Génie Électrique / Électrotechnique

Objectif de l'enseignement et pré-requis

Objectif. Approfondir les connaissances des étudiants sur les différents modèles mathématiques dédiés à l'étude du comportement dynamique des machines électriques.

Pré-requis recommandés. Notions de base sur les machines électriques, électromagnétisme, circuits électriques et algèbre matricielle.

Élaboré par :
Dr. Nour Mohamed
Maître de Conférences classe A
Département de Génie Électrique — Institut de Technologie

Année universitaire 2025 – 2026

Table des matières

Avant-propos

Ce support couvre l'intégralité du programme officiel de la matière « Modélisation des machines électriques » en cinq chapitres, correspondant à quinze semaines d'enseignement (45 heures). Il associe à chaque notion théorique des applications résolues et une séance de travaux dirigés corrigés, de manière à accompagner aussi bien le cours magistral que le travail personnel de l'étudiant.

La démarche adoptée est volontairement unifiée. La théorie de la machine généralisée (chapitre 2) constitue le fil conducteur de l'ensemble : les machines à courant continu (chapitre 3), asynchrones (chapitre 4) et synchrones (chapitre 5) en sont des cas particuliers, obtenus en spécialisant le repère de Park et la structure des matrices d'inductance. Cette approche, plus économique et plus formatrice qu'une étude séparée de chaque machine, met en évidence l'unité profonde de l'électromécanique.

Les conventions de signe sont précisées au fur et à mesure ; sauf mention contraire, la convention récepteur (moteur) est adoptée. Les grandeurs vectorielles et matricielles sont notées en gras. Chaque équation importante est numérotée et encadrée lorsqu'elle constitue un résultat à retenir.

Plan du cours. Ch. 1 — Procédés physiques et mathématiques (2 sem.) ; Ch. 2 — Machine généralisée (4 sem.) ; Ch. 3 — Machines à courant continu (3 sem.) ; Ch. 4 — Machines asynchrones (3 sem.) ; Ch. 5 — Machines synchrones (3 sem.).

Introduction générale

Les machines électriques sont au cœur de la conversion de l'énergie : elles assurent la quasi-totalité de la production d'électricité (alternateurs) et consomment une part majeure de l'énergie électrique mondiale (moteurs). Leur modélisation dynamique est devenue indispensable avec l'essor de l'électronique de puissance et des commandes numériques, qui exigent des modèles fidèles du comportement transitoire, et non plus seulement des caractéristiques en régime permanent.

Historiquement, chaque type de machine a d'abord été étudié séparément, avec ses propres conventions et ses propres outils. L'apport décisif de la théorie de la machine généralisée, développée notamment par Kron, Park, Blondel et Concordia, a été de montrer que toutes ces machines obéissent à un même formalisme : une fois exprimées dans un repère tournant bien choisi, leurs équations prennent la même forme, et seules changent la structure des matrices d'inductance et la vitesse du repère. C'est cette vision unifiée qui structure le présent cours.

La difficulté centrale de la modélisation tient à la dépendance des inductances vis-à-vis de la position du rotor : les équations dans le repère naturel sont à coefficients variables, difficiles à résoudre et peu parlantes. La transformation de Park, véritable clé de voûte du cours, lève cet obstacle en figeant les grandeurs dans un repère adapté, transformant un problème à coefficients variables en un problème à coefficients constants. Toute la suite — machines à courant continu, asynchrones, synchrones — n'est qu'une application de ce principe.

Sur le plan méthodologique, ce support privilégie une progression du général au particulier : on établit d'abord les outils (chapitre 1) et le modèle unifié (chapitre 2), avant d'en déduire chaque machine (chapitres 3 à 5). Chaque notion est illustrée par des applications résolues, consolidée par des travaux dirigés corrigés, et reliée à la pratique par une annexe de simulation. Les compétences visées sont : savoir établir le modèle d'état d'une machine, savoir choisir le repère adapté, savoir calculer couples, puissances et caractéristiques, et savoir interpréter physiquement les comportements dynamiques.

L'étudiant est invité à ne pas se limiter à la mémorisation des formules, mais à comprendre la logique commune qui les sous-tend. Une fois cette logique acquise, les équations apparemment disparates des différentes machines se révèlent être les facettes d'un même objet mathématique, ce qui constitue à la fois une économie intellectuelle et la base de toute commande moderne (contrôle vectoriel, commande directe de couple, observateurs).

Chapitre 1 — Procédés physiques et mathématiques d'étude

Durée : 2 semaines. Ce chapitre met en place les outils indispensables à toute la suite du cours : la description des circuits couplés magnétiquement, le principe de la conversion électromécanique de l'énergie, la dépendance des inductances vis-à-vis de la position du rotor, et l'algèbre des composantes symétriques. Ces quatre briques constituent le socle mathématique sur lequel reposera la théorie unifiée de la machine généralisée du chapitre 2.

1.1 Rappels sur les circuits couplés magnétiquement

Une machine électrique est, du point de vue électrique, un ensemble de bobinages (enroulements) qui partagent un même circuit magnétique. Deux bobinages parcourus par des courants créent chacun un flux ; une partie de ce flux est commune aux deux : c'est le couplage magnétique, décrit quantitativement par l'inductance mutuelle. Comprendre le couplage de deux bobines est donc le point de départ obligé de la modélisation des machines.

Définition — Flux totalisés et inductances

Pour deux bobines couplées parcourues par les courants i_1 et i_2, les flux totalisés (flux embrassés par chaque enroulement) s'écrivent :

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2, \qquad \phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \tag{1.1}$$

où L_1, L_2 sont les inductances **propres** (flux créé par une bobine sur elle-même par unité de courant) et M l'inductance **mutuelle** (flux commun par unité de courant). Le signe de M dépend du sens relatif des enroulements, codifié par la « convention des points ».

En appliquant la loi de Faraday $v = d\varphi/dt$ à chaque enroulement et en ajoutant la chute ohmique Ri, on obtient le modèle électrique complet du système couplé linéaire :

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \qquad v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \tag{1.2}$$

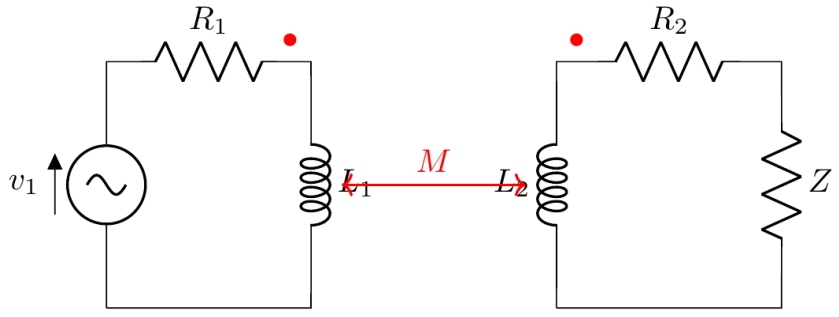


Fig. 1.1 — Deux circuits couplés magnétiquement. Les points indiquent les bornes homologues (convention des points).

Convention des points. Lorsque les courants entrent par les bornes pointées des deux bobines, leurs flux s'ajoutent et la mutuelle est comptée positivement (M > 0). Dans le cas contraire M < 0. Cette convention évite toute ambiguïté de signe dans les équations (1.2).

> **Propriété — Coefficient de couplage**
>
> L'inductance mutuelle est bornée par les inductances propres :
>
> $$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad 0 \le |k| \le 1 \tag{1.3}$$
>
> Le cas k = 1 (couplage parfait) correspond à un flux entièrement commun (transformateur idéal) ; k = 0 traduit un découplage total. Dans une machine réelle, k est proche de 1 entre enroulements d'une même armature et plus faible entre stator et rotor.

L'énergie emmagasinée dans le champ magnétique d'un système linéaire couplé se calcule en intégrant la puissance électrique absorbée à flux croissant. On obtient une forme quadratique des courants :

$$W_{mag} = \tfrac{1}{2} L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 i_2^2 + M\, i_1 i_2 = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{i}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

La matrice symétrique **L** est dite matrice inductance du système. Cette expression de l'énergie (et de sa duale, la coénergie) est la clé du calcul du couple : c'est elle que l'on dérivera par rapport à la position pour obtenir l'effort électromécanique.

1.2 Conversion électromécanique de l'énergie

Une machine tournante convertit l'énergie électrique en énergie mécanique (mode moteur) ou inversement (mode générateur). Le bilan énergétique, appliqué au couplage supposé sans pertes (les pertes Joule et fer sont reportées dans les résistances et un terme séparé), s'écrit pendant un intervalle de temps élémentaire :

$$dW_{\text{élec}} = dW_{mag} + dW_{\text{méc}} \tag{1.5}$$

avec l'énergie électrique fournie au champ $dW_{élec} = \Sigma\, i_k\, d\varphi_k$ et le travail mécanique $dW_{méc} = T^{e}\, d\theta$, θ étant la position angulaire du rotor et T^{e} le couple électromagnétique recherché.

> **Définition — Coénergie et couple électromagnétique**

La **coénergie** est la transformée de Legendre de l'énergie magnétique : W′(i, θ) = Σ $i_k \varphi_k$ − W_mag. Le couple électromagnétique se calcule en dérivant la coénergie **à courants constants** :

$$T_e = \left. \frac{\partial W'(\boldsymbol{i}, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\boldsymbol{i}} \tag{1.6}$$

Pour un système magnétiquement linéaire, énergie et coénergie sont égales et valent ½ $i^T L(\theta) i$. La dérivation donne alors la relation fondamentale du couple, valable pour toute machine idéalisée :

$$T_e = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{i}^{\mathsf{T}}\, \frac{\partial \boldsymbol{L}(\theta)}{\partial \theta}\, \boldsymbol{i} \tag{1.7}$$

Lecture physique de l'équation (1.7)

Le couple n'existe que si la matrice inductance **dépend de la position**. On distingue deux contributions : le couple de **réluctance**, lié à la variation des inductances propres (machines à pôles saillants), et le couple **principal** ou d'**excitation**, lié à la variation des mutuelles entre stator et rotor. Une machine à entrefer parfaitement constant et sans excitation rotorique ne développe aucun couple moyen.

Pour une machine à *p* paires de pôles, l'angle électrique θ et l'angle mécanique θ_m sont liés par $\theta = p \cdot \theta_m$; le couple exprimé par rapport à l'angle mécanique fait alors apparaître le facteur *p*. Le même raisonnement, transposé à une translation, donne la force d'un actionneur linéaire :

$$F = \frac{1}{2}\, i^2\, \frac{dL}{dx} \tag{1.8}$$

1.3 Inductances de la machine

Dans une machine tournante, la rotation du rotor modifie la géométrie du circuit magnétique vu par chaque enroulement, donc sa perméance et ses inductances. C'est précisément cette dépendance angulaire qui rend possible la conversion d'énergie (équation 1.7), mais qui complique aussi la résolution des équations.

Pour une machine à pôles saillants, la perméance du circuit statorique passe par un maximum lorsque l'axe d'une dent rotorique s'aligne sur l'enroulement, et par un minimum en quadrature. Comme ce phénomène se reproduit deux fois par tour, l'inductance propre d'une phase varie en cos(2θ) :

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta) \tag{1.9}$$

La mutuelle entre une phase statorique et l'enroulement rotorique, dont les axes magnétiques font l'angle θ, varie quant à elle en cos(θ), reflet de la projection d'un champ sur l'autre :

$$M_{sr}(\theta) = M \cos(\theta) \tag{1.10}$$

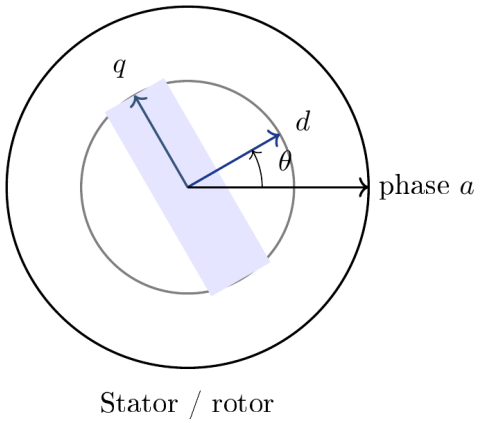


Fig. 1.2 — Position du rotor θ par rapport à l'axe de la phase a ; définition des axes direct (d) et en quadrature (q) liés au rotor.

> **Pourquoi introduire les axes d et q ?**
>
> Les axes d (direct, aligné sur le flux d'excitation) et q (en quadrature, à 90° électriques) sont les directions privilégiées du rotor. Projeter les grandeurs statoriques sur ces axes — c'est l'objet de la transformation de Park (chapitre 2) — fige la dépendance angulaire et transforme les inductances variables en inductances constantes. C'est l'astuce centrale de toute la modélisation dynamique.

1.4 Composantes symétriques et relatives

L'étude des régimes triphasés, équilibrés ou non, et la diagonalisation des matrices d'inductance circulantes s'appuient sur l'algèbre de l'opérateur de rotation a, qui fait tourner un vecteur de 120° dans le plan complexe :

$$a = e^{j2\pi/3}, \qquad 1 + a + a^2 = 0 \tag{1.11}$$

Définition — Transformation de Fortescue

Tout système triphasé (x_a, x_b, x_c) se décompose de manière unique en trois systèmes : direct (d), inverse (i) et homopolaire (o) :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ x_o \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Le système direct tourne dans le sens des phases, l'inverse en sens contraire, l'homopolaire est commun aux trois phases. Un système équilibré direct n'a qu'une composante directe.

Propriété — Diagonalisation des matrices circulantes

La matrice de Fortescue diagonalise toute matrice d'impédance circulante (cas d'une machine symétrique). Dans la base des composantes symétriques, les trois phases couplées se découplent en trois circuits monophasés indépendants. C'est l'origine mathématique des transformations αβ (Clarke/Concordia) et dq (Park) que nous établirons au chapitre 2 : ces dernières sont des changements de base réels, mieux adaptés au traitement temps réel que la transformation complexe de Fortescue.

1.5 Applications résolues

Application 1.1 — Énergie d'un système couplé

Énoncé. Deux bobines ont L_1 = 0,20 H, L_2 = 0,80 H et un coefficient de couplage k = 0,90. Calculer M, puis l'énergie magnétique pour i_1 = 2 A et i_2 = −1 A.

Solution. $M = k\cdot\sqrt{(L_1 L_2)} = 0{,}90\cdot\sqrt{(0{,}20\times 0{,}80)} = 0{,}90\times 0{,}40 = 0{,}36$ H. L'énergie (éq. 1.4) vaut $W = \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}20\cdot 2^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}80\cdot(-1)^2 + 0{,}36\cdot 2\cdot(-1) = 0{,}40 + 0{,}40 - 0{,}72 = 0{,}08$ J. Le terme mutuel, négatif ici (courants de signes opposés), réduit l'énergie stockée.

Application 1.2 — Couple de réluctance d'un actionneur

Énoncé. Un actionneur a une inductance $L(\theta) = L_0 + L_2\cos(2\theta)$ avec L_0 = 50 mH, L_2 = 20 mH, alimenté à courant constant i = 3 A. Donner $T_e(\theta)$ et les positions d'équilibre.

Solution. Avec une seule bobine, l'éq. (1.7) se réduit à $T_e = \tfrac{1}{2}\, i^2\, dL/d\theta = \tfrac{1}{2}\cdot i^2\cdot(-2L_2 \sin 2\theta) = -i^2 L_2$

sin(2θ). Numériquement $T_e = -9\times0{,}02\times\sin(2\theta) = -0{,}18\sin(2\theta)$ N·m. Le couple s'annule pour $2\theta = 0, \pi$, soit $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. L'équilibre est stable là où $dT_e/d\theta < 0$: en $\theta = 0$ (perméance maximale, position d'alignement), instable en $\theta = \pi/2$.

Application 1.3 — Décomposition en composantes symétriques

Énoncé. Décomposer le système $x_a = 10$, $x_b = 10\cdot a^2$, $x_c = 10\cdot a$ (avec $a = e^{j2\pi/3}$).

Solution. Composante directe : $x_d = \frac{1}{3}(x_a + a\cdot x_b + a^2\cdot x_c) = \frac{1}{3}(10 + a\cdot 10a^2 + a^2\cdot 10a) = \frac{1}{3}(10 + 10a^3 + 10a^3) = \frac{1}{3}(10+10+10) = 10$ (car $a^3 = 1$). Composante inverse : $x_i = \frac{1}{3}(x_a + a^2 x_b + a\cdot x_c) = \frac{1}{3}(10 + 10a^4 + 10a^2) = \frac{1}{3}\cdot 10(1 + a + a^2) = 0$. Homopolaire : $x_o = \frac{1}{3}(x_a+x_b+x_c) = \frac{1}{3}\cdot 10(1+a^2+a) = 0$. Le système est donc purement direct, comme attendu.

Travaux Dirigés n°1 — Outils de base

1. Reprendre l'Application 1.1 avec $i_2 = +1$ A et commenter le changement de signe du terme mutuel.
2. Établir, à partir de l'équation (1.6), l'expression générale de la force $F = \tfrac{1}{2} i^2 \, dL/dx$ pour un actionneur de translation, puis l'appliquer à $L(x) = \mu_0 N^2 S/x$ (entrefer x).
3. Une machine a une mutuelle stator–rotor $M_{sr}(\theta) = M\cos\theta$ et des courants i_s, i_r constants. Donner le couple principal $T_e(\theta)$ et la position du couple maximal.
4. Montrer que la matrice de Fortescue est inversible et donner son inverse. En déduire la reconstruction des grandeurs de phase à partir des composantes.
5. Démontrer la relation $1 + a + a^2 = 0$ et calculer a^2, a^3, a^4 en fonction de a.

Éléments de correction — TD n°1

1. Avec $i_2 = +1$ A : $W = 0{,}40 + 0{,}40 + 0{,}72 = 1{,}52$ J. Les flux s'additionnant, le terme mutuel devient positif et l'énergie augmente fortement.

2. $dW_{élec} = i\,d\varphi = i\cdot d(Li)$ à i constant donne, par (1.6), $F = \tfrac{1}{2} i^2 \, dL/dx$. Pour $L = \mu_0 N^2 S/x$, $dL/dx = -\mu_0 N^2 S/x^2 < 0$: la force tend à réduire l'entrefer (force d'attraction), $F = -\tfrac{1}{2} i^2 \, \mu_0 N^2 S/x^2$.

3. $T_e = i_s\, i_r\, dM/d\theta = -M\, i_s\, i_r \sin\theta$; maximum en module pour $\theta = \pm\pi/2$ (axes en quadrature).

4. L'inverse est la matrice [[1,1,1],[a^2,a,1],[a,a^2,1]] (à un facteur près), conformément à (1.12) lu dans l'autre sens.

5. Les racines cubiques de l'unité vérifient $1+a+a^2=0$; $a^2 = e^{j4\pi/3} = \mathrm{conj}(a)$, $a^3 = 1$, $a^4 = a$.

1.6 Compléments : circuits magnétiques et calcul des inductances

Avant d'aborder les machines, il est utile de rappeler comment se calculent concrètement les inductances à partir de la géométrie du circuit magnétique. Ce calcul relie les paramètres du modèle (L, M) aux dimensions physiques (longueur, section, perméabilité, nombre de spires) et éclaire les ordres de grandeur rencontrés dans les machines réelles.

Pour un circuit magnétique de longueur moyenne l, de section S et de perméabilité μ, on définit la réluctance, analogue magnétique de la résistance électrique. La loi d'Hopkinson (« loi d'Ohm » des circuits magnétiques) relie alors la force magnétomotrice Ni au flux :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}, \qquad \phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{Ni\,\mu S}{l} \tag{1.13}$$

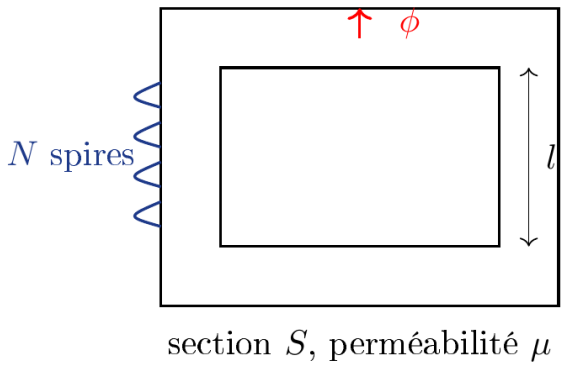


Fig. 1.3 — Circuit magnétique élémentaire : bobine de N spires sur un noyau de section S, longueur moyenne l et perméabilité μ.

L'inductance propre de l'enroulement se déduit immédiatement de la définition L = Nφ/i, soit :

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 \mu S}{l} \tag{1.14}$$

> **Lecture des ordres de grandeur**
>
> L'inductance croît avec le carré du nombre de spires et avec la perméabilité du fer (μ = μr·μ₀, μr de l'ordre de quelques milliers). C'est pourquoi un faible entrefer (où μ = μ₀) domine la réluctance totale : dans une machine, c'est l'entrefer qui « fixe » l'essentiel des inductances et donc les performances. La saturation du fer, traitée au chapitre 4, fait chuter μr et donc L à fort courant.

L'énergie magnétique peut aussi s'exprimer localement à partir de la densité d'énergie dans le champ, ce qui permet de retrouver les expressions globales par intégration sur le volume du circuit :

$$w = \frac{B^2}{2\mu} \quad (\mathrm{J/m^3}), \qquad W_{mag} = \int_V \frac{B^2}{2\mu}\, dV \tag{1.15}$$

Dans le cas non linéaire (matériau saturable), énergie et coénergie ne sont plus égales : elles sont les aires complémentaires situées de part et d'autre de la courbe φ(i). Leur somme vaut toujours le produit flux–courant :

$$W_{mag} + W' = \sum_k i_k \phi_k, \qquad W' = \int \phi\, di \ \text{(coénergie)} \tag{1.16}$$

1.7 Couple principal d'une machine élémentaire

Appliquons la relation fondamentale (1.7) à une machine élémentaire constituée d'un enroulement statorique et d'un enroulement rotorique, dont la mutuelle varie en M(θ) = M·cosθ (équation 1.10). Le couple, dit couple principal ou d'excitation, vaut :

$$T_e = i_s i_r \frac{dM_{sr}}{d\theta} = -M\, i_s i_r \sin\theta \tag{1.17}$$

Ce résultat est central : le couple est maximal en module lorsque les axes des deux enroulements sont en quadrature (θ = ±90°), et nul lorsqu'ils sont alignés (θ = 0). C'est exactement la situation que le collecteur réalise en permanence dans la machine à courant continu (chapitre 3), et que les commandes vectorielles imposent dans les machines à courant alternatif.

1.8 Applications résolues complémentaires

Application 1.4 — Inductance d'un tore

Énoncé. Un tore de section S = 4 cm², de longueur moyenne l = 25 cm, de perméabilité relative μr = 2000, porte N = 300 spires. Calculer la réluctance et l'inductance.

Solution. μ = μr·μ₀ = 2000×4π·10⁻⁷ = 2,51·10⁻³ H/m. Réluctance $\mathcal{R}$ = l/(μS) = 0,25/(2,51·10⁻³×4·10⁻⁴) = 2,49·10⁵ A/Wb. Inductance L = N²/$\mathcal{R}$ = 90000/2,49·10⁵ = 0,361 H. Un entrefer de 1 mm porterait $\mathcal{R}$_air = 0,001/(μ₀×4·10⁻⁴) = 1,99·10⁶ A/Wb, soit huit fois la

réluctance du fer : l'entrefer dominerait largement.

Application 1.5 — Couple maximal d'une machine élémentaire

Énoncé. Pour M = 0,15 H, is = 10 A, ir = 4 A, donner le couple principal en fonction de θ et sa valeur maximale.

Solution. $T_e = -M \cdot is \cdot ir \cdot \sin\theta = -0{,}15 \times 10 \times 4 \times \sin\theta = -6 \cdot \sin\theta$ N·m. Le module maximal, 6 N·m, est atteint pour θ = ±90° (quadrature). Le signe indique que le couple tend à ramener les axes vers l'alignement (θ = 0), position d'énergie minimale.

Application 1.6 — Énergie et coénergie en régime saturé

Énoncé. Un circuit a φ(i) = 0,5·tanh(2i). Comparer qualitativement énergie et coénergie en i = 1 A.

Solution. φ(1) = 0,5·tanh(2) = 0,482 Wb. La coénergie $W' = \int_0^1 \varphi \, di = 0{,}5 \cdot [\ln \cosh(2i)/2]_0^1 = 0{,}25 \cdot \ln(\cosh 2) = 0{,}25 \times 1{,}325 = 0{,}331$ J. L'énergie W = i·φ − W′ = 1×0,482 − 0,331 = 0,151 J. En régime saturé W′ > W : la coénergie (donc le couple, qui en dérive) reste élevée alors que l'énergie stockée plafonne.

Travaux Dirigés n°1 bis — Circuits magnétiques

6. Un circuit magnétique comporte un entrefer e = 0,8 mm en série avec un fer (l_fer = 30 cm, μr = 1500, S = 5 cm²). Calculer la réluctance totale et l'inductance pour N = 200 spires.
7. Démontrer l'expression (1.14) de l'inductance propre à partir de la loi d'Hopkinson (1.13).
8. Pour φ(i) = a·tanh(bi), établir les expressions générales de l'énergie et de la coénergie, et vérifier W + W′ = iφ.
9. Une machine a M(θ) = 0,2·cosθ H ; pour is = 8 A et ir = 3 A constants, déterminer le travail fourni pour faire passer θ de 90° à 0°.

Éléments de correction — TD n°1 bis

1. $\mathcal{R}_fer = 0{,}30/(1500 \cdot \mu_0 \cdot 5 \cdot 10^{-4}) = 3{,}18 \cdot 10^5$; $\mathcal{R}_air = 8 \cdot 10^{-4}/(\mu_0 \cdot 5 \cdot 10^{-4}) = 1{,}27 \cdot 10^6$; $\mathcal{R}_tot = 1{,}59 \cdot 10^6$ A/Wb. $L = N^2/\mathcal{R}_tot = 40000/1{,}59 \cdot 10^6 = 25{,}1$ mH. L'entrefer apporte 80 % de la réluctance.

2. $\varphi = Ni/\mathcal{R}$ donc $N\varphi = N^2 i/\mathcal{R}$ et $L = N\varphi/i = N^2/\mathcal{R} = N^2 \mu S/l$.

3. $W' = \int \varphi \, di = (a/b) \cdot \ln \cosh(bi)$; W = iφ − W′ ; leur somme vaut iφ par construction (transformée de Legendre).

4. Le travail mécanique = variation de coénergie à courants constants : $W_{méc} = \int T_e \, d\theta = \int_{90°\to 0°} (-M\, i_s\, i_r \sin\theta) d\theta = M\, i_s\, i_r [\cos\theta]_{90°\to 0°} = 0{,}2\times 8\times 3\times(1-0) = 4{,}8$ J fournis par le système.

1.9 Exercices d'application supplémentaires

Cette série complète les applications précédentes par des situations numériques variées, destinées à consolider la maîtrise des outils du chapitre (réluctances, énergie, couple, composantes symétriques).

Application 1.7 — Association de réluctances

Énoncé. Un circuit magnétique comporte deux tronçons de fer en série ($\mathcal{R}_1 = 1{,}2\cdot 10^5$ et $\mathcal{R}_2 = 0{,}8\cdot 10^5$ A/Wb) et un entrefer ($\mathcal{R}_e = 1{,}5\cdot 10^6$ A/Wb). Pour N = 250 spires et i = 2 A, calculer le flux et l'inductance.

Solution. Réluctance totale (série) $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e = 1{,}2\cdot 10^5 + 0{,}8\cdot 10^5 + 1{,}5\cdot 10^6 = 1{,}7\cdot 10^6$ A/Wb. Flux $\varphi = Ni/\mathcal{R} = 250\times 2/1{,}7\cdot 10^6 = 2{,}94\cdot 10^{-4}$ Wb. Inductance $L = N^2/\mathcal{R} = 62500/1{,}7\cdot 10^6 = 36{,}8$ mH. L'entrefer impose 88 % de la réluctance totale.

Application 1.8 — Force portante d'un électroaimant

Énoncé. Un électroaimant a une section de pôle S = 10 cm², une induction d'entrefer B = 1,2 T. Estimer la force d'attraction (force de Maxwell).

Solution. La force par unité de surface vaut $B^2/(2\mu_0)$. $F = B^2 \cdot S/(2\mu_0) = 1{,}44\times 10\cdot 10^{-4}/(2\times 4\pi\cdot 10^{-7}) = 1{,}44\cdot 10^{-3}/(2{,}51\cdot 10^{-6}) = 573$ N. Pour deux pôles, la force totale double (≈ 1146 N) : c'est le principe des freins et des relais de puissance.

Application 1.9 — Composantes symétriques d'un défaut

Énoncé. Un système déséquilibré a $V_a = 230\angle 0°$, $V_b = 200\angle -110°$, $V_c = 210\angle 130°$ (V). Calculer la composante homopolaire.

Solution. $V_o = \tfrac{1}{3}(V_a + V_b + V_c)$. En projetant : $V_a = 230$; $V_b \approx -68{,}4 - j188$; $V_c \approx -135 + j161$. Somme ≈ $26{,}6 - j27 \to V_o \approx \tfrac{1}{3}\times 38\angle -45° \approx 12{,}7\angle -45°$ V. La présence d'une composante homopolaire non nulle signale un déséquilibre avec retour par le neutre.

Application 1.10 — Coefficient de couplage d'un transformateur

Énoncé. Deux enroulements ont $L_1 = 0{,}5$ H, $L_2 = 0{,}5$ H et M mesurée = 0,45 H. Calculer k et le flux de fuite relatif.

Solution. $k = M/\sqrt{(L_1 L_2)} = 0{,}45/0{,}5 = 0{,}90$. Le couplage est imparfait : 10 % du flux est de fuite. Le flux de fuite relatif est $1 - k = 0{,}10$, ce qui correspond à une inductance de fuite $L_1(1-k) = 50$ mH par enroulement.

Travaux Dirigés n°1 ter — Synthèse du chapitre 1

10. Un circuit en U avec entrefer e variable : exprimer L(e) et la force F(e) ; calculer F pour e = 1 mm, N = 400, S = 6 cm², i = 3 A.
11. Démontrer que le couple moyen d'une machine à entrefer constant et alimentation continue est nul (absence de variation des inductances).
12. Décomposer en composantes symétriques un système purement inverse et vérifier l'annulation des composantes directe et homopolaire.
13. Un actionneur a deux bobines couplées ($L_1 = L_2 = 0{,}1$ H, $M(x) = 0{,}08 \cdot e^{-x/x_0}$ H, $x_0 = 5$ mm). Donner la force pour $i_1 = i_2 = 2$ A en $x = x_0$.

Éléments de correction — TD n°1 ter

1. $L(e) = N^2 \mu_0 S/e$ (entrefer dominant) ; $F = -\tfrac{1}{2} i^2 dL/de = \tfrac{1}{2} i^2 N^2 \mu_0 S/e^2$. $F = 0{,}5 \times 9 \times 160000 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 6 \cdot 10^{-4} / (10^{-6}) = 543$ N.

2. Si $dL/d\theta = 0$ et $dM/d\theta = 0$, l'équation (1.7) donne $T_e = 0$: aucune conversion d'énergie sans variation d'inductance.

3. Pour un système inverse pur, seule Vi est non nulle ; Vd = Vo = 0 par orthogonalité de la base de Fortescue.

4. $F = i_1 i_2 \, dM/dx = 4 \times (-0{,}08/x_0) e^{-1} = 4 \times (-16) \times 0{,}368 = -23{,}5$ N (force tendant à réduire x).

1.10 Approfondissement : énergie, coénergie et stabilité

On revient sur la distinction énergie / coénergie, essentielle pour le calcul correct du couple dans les systèmes saturables, et sur la notion de stabilité d'un point d'équilibre électromécanique.

Pour un système linéaire, énergie et coénergie sont numériquement égales, mais leurs dérivées s'interprètent différemment : le couple se calcule comme dérivée de la coénergie à courants constants, ou comme l'opposé de la dérivée de l'énergie à flux constants. Les deux approches donnent le même résultat physique, mais l'une ou l'autre est plus commode selon les variables imposées par la source (source de courant ou de tension).

Critère de stabilité d'un point d'équilibre

Un point d'équilibre θ_0 (où $T_e = Tr$) est stable si une petite perturbation engendre un couple de

rappel, c'est-à-dire si $dT_e/d\theta < 0$ au point considéré (pour une charge à couple constant). Cette condition, déjà rencontrée pour l'actionneur de l'Application 1.2, se généralise à toutes les machines : la stabilité statique des alternateurs ($\delta < 90°$, chapitre 5) en est l'expression la plus connue.

Application 1.11 — Aimant et bobine

Énoncé. Une bobine (L = 0,1 H, N = 200) attire une pièce ferromagnétique ; l'inductance varie $L(x) = 0{,}1/(1 + x/x_0)$ avec $x_0 = 2$ mm. Pour i = 5 A, donner la force en $x = x_0$.

Solution. $F = \tfrac{1}{2} i^2 dL/dx = \tfrac{1}{2} \times 25 \times [-0{,}1/x_0 \cdot (1+x/x_0)^{-2}]$. En $x = x_0$: $(1 + 1)^{-2} = \tfrac{1}{4}$. $F = 12{,}5 \times (-0{,}1/0{,}002) \times 0{,}25 = 12{,}5 \times (-50) \times 0{,}25 = -156$ N (force d'attraction réduisant x).

Application 1.12 — Bilan énergétique d'un cycle

Énoncé. Un actionneur effectue un cycle fermé dans le plan (φ, i) entourant une aire de 0,4 J. Que représente cette aire ?

Solution. L'aire enfermée par le cycle dans le plan (φ, i) représente le travail mécanique net fourni par le système en un cycle (conversion électromécanique). Ici 0,4 J par cycle ; multiplié par la fréquence, il donne la puissance mécanique moyenne.

Travaux Dirigés n°1 quater — Énergie et stabilité

14. Pour $L(\theta) = L_0 + L_2 \cos 2\theta$ et i constant, étudier la stabilité des positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.
15. Calculer le travail mécanique d'un cycle où le courant passe de 0 à I puis revient, à inductance variable.
16. Comparer le couple calculé par dérivée de l'énergie (flux constants) et de la coénergie (courants constants) pour un système linéaire.

Éléments de correction — TD n°1 quater

1. $T_e = -i^2 L_2 \sin 2\theta$; $dT_e/d\theta = -2i^2 L_2 \cos 2\theta$. En $\theta = 0$: $dT_e/d\theta < 0$ → stable. En $\theta = \pi/2$: $dT_e/d\theta > 0$ → instable.

2. Le travail net est l'aire du cycle dans le plan (φ, i) ; pour un système linéaire sans hystérésis, le cycle est dégénéré (aire nulle) → pas de conversion ; l'hystérésis ou la variation d'inductance crée l'aire.

3. $T_e = \partial W'/\partial\theta \,|\, i = -\partial W/\partial\theta \,|\, \varphi$; pour un système linéaire les deux donnent $\tfrac{1}{2} i^T (dL/d\theta) i$.

1.11 Série d'exercices supplémentaires (entraînement)

Série A — Circuits magnétiques et couple

Exercices d'entraînement à résoudre de façon autonome. Les méthodes sont celles des sections 1.1 à 1.10.

17. Un solénoïde de 500 spires, longueur 20 cm, section 4 cm² (air). Calculer son inductance.
18. Deux bobines $L_1 = 0{,}3$ H, $L_2 = 0{,}12$ H, $k = 0{,}8$. Donner M et l'énergie pour $i_1 = 3$ A, $i_2 = 2$ A.
19. Un circuit magnétique a un entrefer de 1,2 mm ($S = 8$ cm²). Calculer sa réluctance d'entrefer.
20. Pour $L(\theta) = 40 + 12\cos 2\theta$ (mH), $i = 4$ A, donner le couple maximal et sa position.
21. Un électroaimant développe 800 N sous $B = 1{,}1$ T. En déduire la section utile des pôles.
22. Décomposer en composantes symétriques : $Va = 100$, $Vb = 100\angle 120°$, $Vc = 100\angle -120°$.
23. Montrer que pour un système homopolaire pur, seules les composantes 0 sont non nulles.
24. Un transformateur a $L_1 = L_2 = 1$ H, $M = 0{,}95$ H. Calculer le coefficient de fuite $1 - k^2$.

1.12 Rappels sur la constitution des machines électriques

Avant d'aborder la modélisation proprement dite, il est utile de resituer les éléments physiques communs à toutes les machines tournantes. Une machine électrique comporte une partie fixe, le stator, et une partie mobile, le rotor, séparées par un entrefer. Les enroulements, logés dans des encoches, créent et captent les champs magnétiques ; le circuit magnétique (tôles de fer feuilletées pour limiter les courants de Foucault) canalise le flux.

Le comportement du circuit magnétique est gouverné par la courbe d'aimantation B(H) du matériau : linéaire à faible induction, elle sature au-delà d'un coude (typiquement 1,5 à 1,8 T pour les tôles usuelles). Cette saturation, négligée dans le modèle idéalisé du chapitre 2, doit être prise en compte pour les fonctionnements à fort flux (chapitre 4).

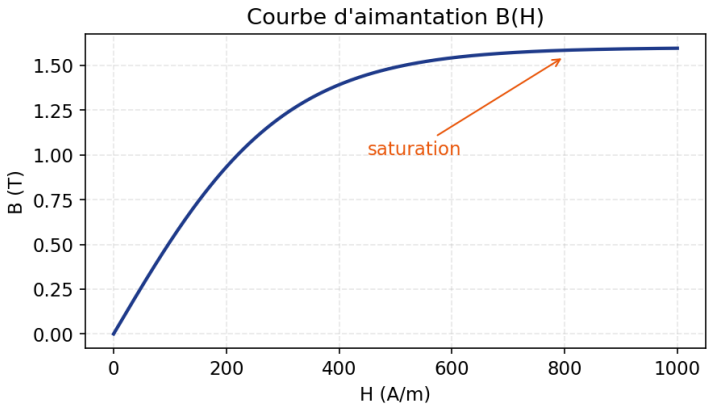


Fig. 1.4 — Courbe d'aimantation B(H) d'un matériau ferromagnétique : zone linéaire puis saturation au-delà du coude.

Éléments communs à toutes les machines

- Stator : circuit magnétique fixe portant des enroulements (induit ou inducteur selon la machine).
- Rotor : partie tournante (bobiné, à cage, à aimants ou à pôles saillants selon le type).
- Entrefer : espace d'air où s'effectue la conversion ; son épaisseur conditionne les inductances.
- Enroulements : sièges des f.m.m. ; leur répartition (supposée sinusoïdale) fixe la forme du champ.

La classification des machines repose sur la nature de l'alimentation et du couplage : machine à courant continu (collecteur), machine asynchrone (induction, rotor en court-circuit) et machine synchrone (rotor excité ou à aimants). Toutes, cependant, obéissent au même formalisme de la machine généralisée, comme le montrera le chapitre 2 : c'est cette unité que le présent cours met en lumière.

1.13 Schéma-blocs : modèle de la conversion électromécanique

Le modèle établi dans ce chapitre se résume par le schéma-blocs ci-dessous, qui relie les grandeurs électriques d'entrée au couple produit. Il met en évidence la chaîne de conversion : le circuit électrique impose les courants, le couplage magnétique relie courants et flux à travers la matrice d'inductance dépendant de la position, et le bloc de conversion produit le couple par dérivation de la coénergie.

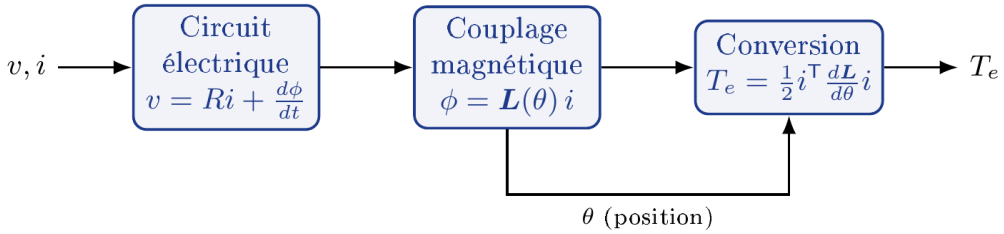


Fig. 1.5 — Schéma-blocs du modèle de conversion électromécanique : la position θ module le couplage magnétique, source du couple.

La rétroaction de la position θ sur le bloc de conversion traduit le fait fondamental du chapitre : sans variation des inductances avec la position, aucun couple moyen n’est produit.

Chapitre 2 — Théorie de la machine électrique généralisée

Durée : 4 semaines. Ce chapitre constitue le cœur du cours. Plutôt que d'étudier séparément chaque type de machine, on construit un modèle mathématique unique — la machine généralisée — dont les machines à courant continu, asynchrones et synchrones se déduisent par particularisation. L'outil central est la transformation de Park, qui élimine la dépendance angulaire des inductances et ramène un système triphasé couplé à coefficients variables à un système biphasé à coefficients constants.

2.1 La machine électrique idéalisée

Pour rendre le problème traitable analytiquement, on adopte un modèle idéalisé qui capture l'essentiel de la physique tout en éliminant les phénomènes secondaires. Ces hypothèses sont communes à toutes les machines étudiées dans ce cours.

Hypothèses de la machine idéalisée

1. L'entrefer est constant (machine à pôles lisses) ou varie de façon sinusoïdale (pôles saillants) ;
2. la force magnétomotrice (f.m.m.) créée par chaque enroulement est répartie de façon sinusoïdale dans l'entrefer ;
3. le circuit magnétique est non saturé (linéarité) et les pertes fer sont négligées ;
4. les enroulements sont symétriques ; les harmoniques d'espace et les effets d'encoches sont ignorés.

Sous ces hypothèses, toutes les inductances mutuelles entre stator et rotor sont des fonctions sinusoïdales de la position θ, et la machine est entièrement décrite par des matrices d'inductance dont la structure est imposée par la symétrie. La répartition sinusoïdale de la f.m.m. est l'hypothèse la plus importante : c'est elle qui justifie la représentation par vecteurs d'espace et les transformations de Clarke et Park.

2.2 Machine généralisée dans le repère naturel

On considère une machine à deux armatures : le stator (indice s) et le rotor (indice r), chacune comportant trois enroulements décalés de 120° électriques. Les grandeurs sont regroupées en vecteurs colonnes, par exemple pour les tensions statoriques $v_s = [v_{as}\ v_{bs}\ v_{cs}]^T$, et de même pour les courants et les flux.

Équations électriques dans le repère naturel

L'application de la loi de Faraday à chaque armature donne, sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{R}_s \boldsymbol{i}_s + \frac{d\boldsymbol{\phi}_s}{dt}, \qquad \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{R}_r \boldsymbol{i}_r + \frac{d\boldsymbol{\phi}_r}{dt} \tag{2.1}$$

avec Rs = Rs·I_3 et Rr = Rr·I_3 (matrices diagonales de résistances), et les relations flux–courant :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_s \\ \boldsymbol{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{ss} & \boldsymbol{L}_{sr}(\theta) \\ \boldsymbol{L}_{sr}^{\mathsf{T}}(\theta) & \boldsymbol{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_s \\ \boldsymbol{i}_r \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Cette écriture compacte cache la difficulté essentielle : la matrice d'inductance dépend de la position θ du rotor, qui varie elle-même au cours du temps. Le système (2.1)–(2.2) est donc à coefficients variables, ce qui interdit toute solution analytique simple et motive le changement de repère développé plus loin.

2.3 Modèle triphasé : structure des matrices d'inductance

La symétrie de la machine impose la forme des sous-matrices d'inductance. Pour une machine à pôles lisses, les matrices propres statorique et rotorique sont circulantes et constantes (l'entrefer ne dépend pas de la position) :

$$\boldsymbol{L}_{ss} = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Ls et Lr sont les inductances propres d'une phase ; Ms et Mr les mutuelles entre phases d'une même armature (négatives pour une répartition sinusoïdale). En revanche, le couplage entre stator et rotor dépend explicitement de la position, car la projection du champ d'une armature sur l'autre suit le cosinus de l'angle qui les sépare :

$$\boldsymbol{L}_{sr}(\theta) = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Le verrou à lever

La dépendance en θ de Lsr(θ) (équation 2.4) rend le modèle (2.1)–(2.2) à coefficients variables : il est pratiquement impossible à intégrer tel quel, et son interprétation physique est

obscure. Tout l'intérêt des transformations développées dans les sections suivantes est précisément d'éliminer cette dépendance angulaire, en se plaçant dans un repère qui « tourne avec » le phénomène.

2.4 Machine généralisée sous forme complexe (vecteur d'espace)

Une première façon de condenser les trois grandeurs de phase consiste à les regrouper en un nombre complexe unique, le vecteur d'espace, qui résume l'amplitude et la direction du champ tournant créé par les trois phases.

Vecteur d'espace

À tout triplet (xa, xb, xc) on associe le vecteur d'espace complexe :

$$\underline{x} = \frac{2}{3}\left(x_a + a\,x_b + a^2 x_c\right), \qquad a = e^{j2\pi/3} \tag{2.5}$$

Le facteur 2/3 assure que, pour un système sinusoïdal équilibré, le module |x| est égal à l'amplitude des grandeurs de phase. Le vecteur d'espace tourne dans le plan complexe à la vitesse de la pulsation d'alimentation.

Dans cette représentation, le couplage stator–rotor (2.4) se ramène à un simple facteur e^{jθ} (rotation), ce qui prépare naturellement le passage aux axes tournants : multiplier un vecteur d'espace par e^{−jθ} revient à l'observer depuis un repère lié au rotor.

2.5 Passage d'un système triphasé au système biphasé et inversement

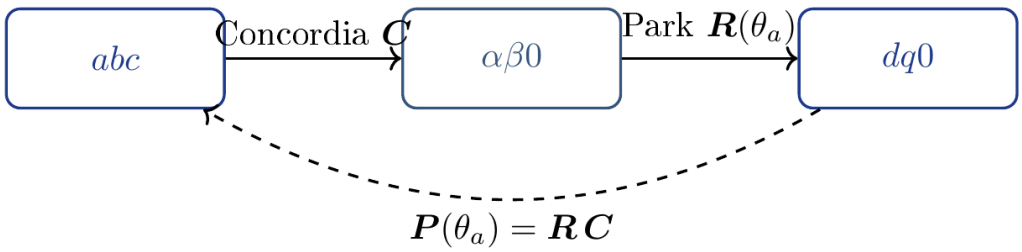


Fig. 2.1 — Chaîne des transformations : du repère naturel abc au repère tournant dq0, via le repère fixe αβ0. La transformation de Park P(θa) est la composée de Concordia et d'une rotation.

2.5.1 Transformation de Clarke / Concordia (abc → αβ0)

La première étape projette les trois grandeurs sur deux axes fixes orthogonaux α et β, plus une composante homopolaire 0. On privilégie la version de Concordia, normalisée pour conserver la puissance.

Transformation de Concordia (conservation de puissance)

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{x}_{abc}$$

(2.6)

La matrice C est orthogonale ($C^{-1} = C^T$) : la puissance instantanée est invariante, $p = v^T_{abc} \cdot i_{abc} = v^T_{\alpha\beta 0} \cdot i_{\alpha\beta 0}$. C'est l'avantage décisif de la normalisation √(2/3) par rapport à la transformation de Clarke classique (facteur 2/3, non conservative).

2.5.2 Transformation de Park (αβ → dq)

La seconde étape applique une rotation d'angle θa (position du repère tournant choisi) pour « figer » les grandeurs : un vecteur tournant à la vitesse $\dot{\theta}_a$ apparaît alors constant dans ce repère.

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \sin\theta_a \\ -\sin\theta_a & \cos\theta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

(2.7)

La transformation de Park complète abc → dq0 est la composée $P(\theta a) = R(\theta a) \cdot C$:

$$\boldsymbol{P}(\theta_a) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(2.8)

Effet de Park sur les équations électriques

Dans un repère tournant à la vitesse $\omega a = \dot{\theta}a$, la dérivation d'une grandeur tournante fait apparaître un terme de vitesse (f.é.m. de rotation). Pour une armature, les équations deviennent :

$$v_d = R\, i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega_a \phi_q, \qquad v_q = R\, i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega_a \phi_d$$

(2.9)

Le terme dφ/dt est dit « terme transformateur » (variation propre du flux) ; les termes ±ωaφ sont les « termes de rotation ». Surtout, les inductances apparaissant dans les flux deviennent

constantes : le modèle est désormais à coefficients fixes, intégrable et interprétable.

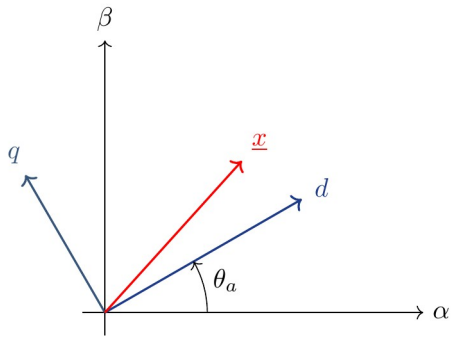


Fig. 2.2 — Repère fixe αβ et repère tournant dq, calé par l'angle θa. Le vecteur d'espace x, tournant dans αβ, devient à composantes constantes dans dq.

2.6 Équation du mouvement de la machine

Le couplage électromécanique se referme par l'équation mécanique de la rotation, qui relie le couple électromagnétique au mouvement du rotor.

Équation mécanique

$$J\frac{d\Omega}{dt} = T_e - T_r - f\,\Omega, \qquad \Omega = \frac{\omega_r}{p} \tag{2.10}$$

J est le moment d'inertie de l'ensemble tournant, f le coefficient de frottement visqueux, Tr le couple résistant (charge), Ω la vitesse mécanique et ωr = pΩ la pulsation électrique du rotor (p paires de pôles).

Dans le repère de Park, le couple électromagnétique prend une forme remarquablement simple et universelle (avec la normalisation de Concordia, facteur 3/2) :

$$T_e = \frac{3}{2}\,p\,(\phi_d\,i_q - \phi_q\,i_d) \tag{2.11}$$

Cette expression sera spécialisée à chaque machine : pour la MCC elle se réduit à un produit de deux courants (chapitre 3) ; pour la machine asynchrone elle fait intervenir les flux et courants rotoriques (chapitre 4) ; pour la machine synchrone elle distingue couple synchrone et couple de réluctance (chapitre 5).

2.7 Applications résolues

Application 2.1 — Orthogonalité de Concordia

Énoncé. Vérifier que la matrice C de (2.6) est orthogonale et en déduire l'invariance de la puissance.

Solution. On calcule $C^{T}\cdot C$. La première colonne de C a pour norme $(2/3)[1 + ¼ + ¼] = (2/3)(3/2) = 1$; les colonnes sont deux à deux orthogonales (la somme des produits croisés fait intervenir $1 + a + a^2 = 0$). Donc $C^{T}\cdot C = I_3$, soit $C^{-1} = C^{T}$. La puissance s'écrit alors $p = v^{T}abc\cdot iabc = (C^{-1} v\alpha\beta 0)^{T}(C^{-1} i\alpha\beta 0) = v^{T}\alpha\beta 0(C^{-T} C^{-1}) i\alpha\beta 0 = v^{T}\alpha\beta 0\cdot i\alpha\beta 0$, d'où l'invariance.

Application 2.2 — Park d'un système équilibré

Énoncé. Un système de courants triphasés équilibrés $ia = Im \cos(\omega t)$, $ib = Im \cos(\omega t - 2\pi/3)$, $ic = Im \cos(\omega t + 2\pi/3)$ est transformé par Park avec $\theta a = \omega t$. Donner id et iq.

Solution. Avec $\theta a = \omega t$ (repère synchrone), l'application de (2.8) donne $id = \sqrt{(3/2)}\cdot Im$ et $iq = 0$: les grandeurs sinusoïdales deviennent constantes. C'est l'illustration directe de l'intérêt de Park — un régime alternatif équilibré apparaît comme un point fixe dans le repère tournant.

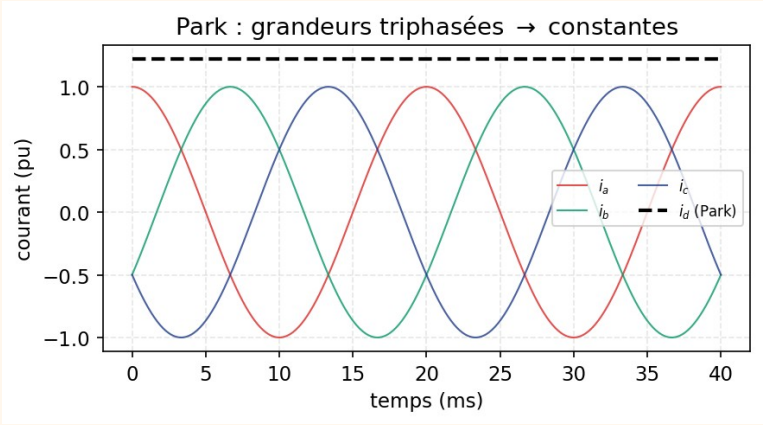


Fig. 2.3 — Trois courants triphasés (alternatifs) deviennent des grandeurs constantes après transformation de Park (repère synchrone).

Travaux Dirigés n°2 — Transformations et modèle généralisé

1. Démontrer l'orthogonalité de la matrice de Concordia C et calculer C^{-1}.
2. Montrer que la transformation de Park appliquée à Lsr(θ) (éq. 2.4), avec $\theta a = \theta$ pour le rotor, élimine la dépendance en θ.
3. À partir de (2.9), identifier les termes « transformateur » et « rotation » et interpréter physiquement la f.é.m. de rotation.
4. Retrouver l'expression du couple (2.11) à partir de la coénergie exprimée dans le repère dq.
5. Calculer le vecteur d'espace d'un système homopolaire pur ($ia = ib = ic = x_0$) et commenter.

Éléments de correction — TD n°2

1. $C^T C = I_3$ donc $C^{-1} = C^T$ (voir Application 2.1). La normalisation $\sqrt{(2/3)}$ est essentielle.

2. La rotation de Park appliquée à une armature aligne les axes et transforme les cosinus variables de (2.4) en termes constants : Md = (3/2)Msr sur l'axe d et 0 sur l'axe q (pôles lisses).

3. dφ/dt : f.é.m. de variation propre (effet transformateur). ±ωaφ : f.é.m. de rotation (effet dynamo), responsable de la conversion d'énergie en régime établi.

4. En coénergie exprimée en dq, seuls subsistent les produits croisés, d'où $T_e = (3/2)p(\varphi d\, iq - \varphi q\, id)$.

5. $x = (2/3)x_0(1 + a + a^2) = 0$: un système homopolaire ne crée aucun vecteur d'espace (pas de champ tournant), d'où la séparation de la composante 0.

2.8 Transformations inverses et invariance de la puissance

Les transformations de Concordia et de Park étant orthogonales, leurs inverses se réduisent à leurs transposées, ce qui simplifie considérablement le retour aux grandeurs de phase. Pour Park :

$$\boldsymbol{x}_{abc} = \boldsymbol{P}^{-1}(\theta_a)\,\boldsymbol{x}_{dq0} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}(\theta_a)\,\boldsymbol{x}_{dq0} \tag{2.12}$$

La transformation de Clarke/Concordia inverse, qui reconstruit les grandeurs triphasées à partir des composantes αβ0, s'écrit explicitement :

$$\boldsymbol{x}_{abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\alpha\beta 0} \tag{2.13}$$

L'avantage fondamental de la normalisation de Concordia est la conservation de la puissance instantanée à travers la transformation : aucune correction de facteur n'est nécessaire dans les bilans énergétiques.

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 \tag{2.14}$$

Park « amplitude » contre Park « puissance »

Deux conventions coexistent dans la littérature. La convention « conservation de puissance »

(facteur √(2/3), adoptée ici) rend les transformations orthogonales et les bilans de puissance directs. La convention « conservation d'amplitude » (facteur 2/3) fait apparaître un coefficient 3/2 dans la puissance et dans le couple. Les deux sont correctes ; il faut simplement rester cohérent. Le facteur 3/2 de l'équation (2.11) provient précisément de ce choix lorsqu'on revient aux amplitudes physiques.

2.9 Établissement détaillé des équations de Park

Reprenons le passage des équations naturelles (2.1) aux équations de Park (2.9), car ce calcul est au cœur de toute la modélisation. On part de v = R·i + dφ/dt et l'on applique la transformation P(θa) en remarquant que P dépend du temps via θa(t).

En posant x_dq0 = P·x_abc, donc x_abc = P^{-1}·x_dq0, la dérivée temporelle du flux devient dφ_abc/dt = d(P^{-1}φ_dq0)/dt = P^{-1}·dφ_dq0/dt + (dP^{-1}/dt)·φ_dq0. En multipliant l'équation à gauche par P et en simplifiant, le second terme fait apparaître la matrice de rotation dont la dérivée engendre précisément les termes ±ωa·φ. La vitesse du repère est gouvernée par :

$$\frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a, \qquad \theta_a(t) = \theta_{a0} + \int_0^t \omega_a \, d\tau \tag{2.15}$$

Le choix de cette vitesse ωa distingue les trois grands repères : repère statorique fixe (ωa = 0, transformation de Clarke seule), repère lié au champ tournant (ωa = ωs, utilisé pour la machine asynchrone), et repère lié au rotor (ωa = ω, utilisé pour la machine synchrone). C'est ce choix qui adapte le modèle généralisé à chaque machine.

Les trois repères et leurs usages

Repère fixe (ωa = 0). Grandeurs αβ ; utile pour les commandes type DTC et l'observation. Les grandeurs restent alternatives.

Repère du champ (ωa = ωs). Adapté à la machine asynchrone : les grandeurs de régime permanent deviennent continues, ce qui permet le contrôle vectoriel à flux orienté.

Repère du rotor (ωa = ω). Adapté à la machine synchrone : l'axe d suit l'excitation, les inductances Ld, Lq sont constantes.

Dans le repère du rotor, les flux statoriques de la machine généralisée prennent la forme compacte qui servira aux chapitres suivants :

$$\phi_d = L_d i_d + M i_{dr}, \qquad \phi_q = L_q i_q + M i_{qr} \tag{2.16}$$

2.10 Applications résolues complémentaires

Application 2.3 — Reconstruction des grandeurs de phase

Énoncé. Dans le repère synchrone, on a id = 10 A, iq = 0, i0 = 0, avec θa = ωt. Reconstruire ia(t).

Solution. Par la transformation inverse (2.12), ia = √(2/3)·[cosθa·id − sinθa·iq] = √(2/3)·10·cos(ωt) = 8,16·cos(ωt) A. On retrouve bien un courant alternatif d'amplitude Im = √(2/3)·id, cohérent avec l'Application 2.2 (relation inverse).

Application 2.4 — Vérification de l'invariance de puissance

Énoncé. Pour vd = 311 V, vq = 0, id = 10 A, iq = 0 (i0 = 0), calculer la puissance dans les deux repères et conclure.

Solution. Dans le repère dq : p = vd·id + vq·iq = 311×10 = 3110 W. En grandeurs de phase, vd = √(2/3)·V̂ donne V̂ = 381 V et Î = √(2/3)·… ; le produit triphasé p = (3/2)·V̂·Î (amplitudes) redonne 3110 W. L'égalité confirme (2.14) : la puissance est bien invariante.

Travaux Dirigés n°2 bis — Park approfondi

6. Écrire explicitement la matrice $P^{-1}(\theta a)$ et vérifier $P \cdot P^{-1} = I_3$.
7. Établir le terme de rotation ±ωaφ en dérivant P^{-1} par rapport au temps (calcul détaillé de la section 2.9).
8. Pour un système déséquilibré ia = 10, ib = 8, ic = 6 (constants), calculer i0 et commenter la présence d'une composante homopolaire.
9. Montrer que dans le repère fixe (ωa = 0), les équations de Park se réduisent aux équations de Clarke (αβ).

Éléments de correction — TD n°2 bis

1. $P^{-1} = P^T$ (orthogonalité) ; le produit $P \cdot P^T$ donne I_3 grâce aux identités trigonométriques et à $1+a+a^2 = 0$.

2. $dP^{-1}/dt = \omega a \cdot (dP^{-1}/d\theta a)$; la dérivée de la matrice de rotation est une rotation de +90°, d'où l'apparition de −ωaφq sur l'axe d et +ωaφd sur l'axe q.

3. i0 = √(1/3)(ia+ib+ic) = √(1/3)×24 = 13,9 A : un système déséquilibré possède une composante homopolaire non nulle, qui ne participe pas au champ tournant mais circule si le neutre est relié.

4. Avec $\omega a = 0$, les termes $\pm\omega a\varphi$ disparaissent et P se réduit à la matrice de Concordia : on retrouve $v = Ri + d\varphi/dt$ sur les axes fixes $\alpha\beta$.

2.11 Exercices d'application supplémentaires

Ces exercices approfondissent la manipulation des transformations et leur interprétation physique.

Application 2.5 — Vecteur d'espace d'un creux de tension

Énoncé. Calculer le vecteur d'espace de va = 100, vb = 100, vc = −50 (V, instantané).

Solution. $v = (2/3)(va + a\cdot vb + a^2\cdot vc) = (2/3)(100 + 100a - 50a^2)$. Avec $a = -0{,}5 + j0{,}866$ et $a^2 = -0{,}5 - j0{,}866$: $100a = -50 + j86{,}6$; $-50a^2 = 25 + j43{,}3$. Somme = $75 + j129{,}9 \rightarrow v = (2/3)\times 150\angle 60° = 100\angle 60°$ V. Le vecteur n'est plus aligné : le déséquilibre se traduit par une trajectoire elliptique.

Application 2.6 — Pulsation du repère et glissement

Énoncé. Une machine asynchrone tourne à $\omega = 0{,}96\cdot\omega s$. Quelle vitesse de repère ωa choisir pour figer les grandeurs rotoriques, et quelle est la pulsation des grandeurs rotoriques ?

Solution. Les grandeurs rotoriques ont pour pulsation $\omega r = \omega s - \omega = 0{,}04\cdot\omega s$ (pulsation de glissement). Pour les figer, on choisit un repère tournant à la vitesse du champ $\omega a = \omega s$; les grandeurs rotoriques y apparaissent alors continues. La fréquence rotorique vaut $g\cdot f = 0{,}04\times 50 = 2$ Hz.

Application 2.7 — Couple par les flux et courants

Énoncé. Dans un repère dq, $\varphi d = 1{,}2$ Wb, $\varphi q = 0{,}3$ Wb, id = 5 A, iq = 20 A, p = 2. Calculer le couple.

Solution. $T_e = (3/2)p(\varphi d\cdot iq - \varphi q\cdot id) = 1{,}5\times 2\times(1{,}2\times 20 - 0{,}3\times 5) = 3\times(24 - 1{,}5) = 3\times 22{,}5 = 67{,}5$ N·m. Le terme principal $\varphi d\cdot iq$ domine ; la composante $\varphi q\cdot id$ le réduit légèrement.

Travaux Dirigés n°2 ter — Synthèse du chapitre 2

10. Établir la matrice de Park complète P(θa) et vérifier qu'elle est orthogonale (det = 1).
11. Un système triphasé direct d'amplitude 311 V est observé dans un repère tournant à $\omega a = \omega s/2$. Décrire l'allure des composantes dq obtenues.
12. Montrer que la transformation conserve la puissance pour un système quelconque (avec composante homopolaire).

13. Exprimer le module du vecteur d'espace en fonction de id et iq et interpréter géométriquement.

Éléments de correction — TD n°2 ter

1. P(θa) est donnée par (2.8) ; $P^TP = I_3$ et det P = 1 (rotation composée d'un changement de base orthonormé).

2. Avec ωa = ωs/2, les composantes dq oscillent à la pulsation résiduelle ωs − ωa = ωs/2 : le repère « à demi-vitesse » ne fige pas les grandeurs, qui restent alternatives à 25 Hz.

3. $p = v^T abc\ iabc = v^T dq0\ idq0$ (incluant le terme homopolaire v0 i0), conséquence de l'orthogonalité (éq. 2.14).

4. $|x| = \sqrt{(xd^2 + xq^2)}$: module du vecteur d'espace, invariant par rotation du repère ; il représente l'amplitude du champ tournant.

2.12 Approfondissement : interprétation géométrique de Park

La transformation de Park admet une interprétation géométrique éclairante : le vecteur d'espace, qui tourne dans le plan complexe fixe αβ à la pulsation du réseau, est « observé » depuis un repère tournant dq. Si ce repère tourne exactement à la même vitesse, le vecteur apparaît immobile : c'est pourquoi un régime alternatif équilibré devient un point fixe en dq. Cette idée fonde l'ensemble des commandes vectorielles.

On peut aussi voir Park comme la composition de deux opérations : une réduction de dimension (trois grandeurs liées par leur somme → deux grandeurs indépendantes + une homopolaire), réalisée par Concordia, suivie d'un changement de repère tournant, réalisé par la rotation. La première supprime la redondance, la seconde supprime la dépendance temporelle.

Application 2.8 — Trajectoire du vecteur d'espace

Énoncé. Décrire la trajectoire du vecteur d'espace pour (i) un système triphasé équilibré direct, (ii) un système comportant une composante inverse.

Solution. (i) Système équilibré direct : le vecteur décrit un cercle parcouru à vitesse constante ωs (champ tournant circulaire). (ii) Avec une composante inverse, la trajectoire devient une ellipse : le champ n'est plus circulaire, ce qui engendre des couples pulsatoires (vibrations, échauffements).

Application 2.9 — Choix du repère pour une MAS

Énoncé. Pour commander une machine asynchrone, on souhaite des grandeurs continues en régime permanent. Quel repère choisir et pourquoi ?

Solution. On choisit le repère lié au champ tournant ($\omega_a = \omega_s$). Les grandeurs statoriques, alternatives à ω_s dans le repère fixe, deviennent alors continues, ce qui permet d'utiliser des régulateurs PI classiques (erreur statique nulle sur une consigne continue). C'est le principe du contrôle vectoriel à flux orienté.

Travaux Dirigés n°2 quater — Park et champs tournants

14. Montrer qu'un système triphasé équilibré crée un champ tournant d'amplitude constante (théorème de Ferraris).
15. Calculer la trajectoire du vecteur d'espace pour $i_a = \cos \omega t$, $i_b = \cos(\omega t - 2\pi/3)$, $i_c = 0$ (déséquilibre).
16. Expliquer pourquoi la composante homopolaire ne contribue pas au couple.

Éléments de correction — TD n°2 quater

1. La somme des trois f.m.m. sinusoïdales décalées de 120° dans l'espace et dans le temps donne un vecteur de module constant $(3/2)\cdot\hat{F}$ tournant à ω_s : c'est le théorème de Ferraris.

2. Avec $i_c = 0$, le vecteur d'espace décrit une ellipse (présence d'une composante inverse), source de couple pulsatoire.

3. La composante homopolaire correspond à des courants identiques dans les trois phases : leurs champs se compensent dans l'entrefer, ne créant aucun champ tournant ni couple.

2.13 Série d'exercices supplémentaires (entraînement)

Série B — Transformations et machine généralisée

Exercices portant sur les transformations de Clarke, Concordia et Park et le modèle généralisé.

17. Écrire la matrice de Clarke (non normée) et comparer à Concordia.
18. Calculer le vecteur d'espace de $i_a = 10$, $i_b = -5$, $i_c = -5$ (instantané).
19. Vérifier que $P(0)$ appliquée à un système continu équilibré donne i_d constant.
20. Pour $\theta_a = \omega t$ et un système direct d'amplitude 311 V, donner v_d, v_q.
21. Montrer que la puissance instantanée est invariante par Concordia.
22. Établir l'expression du couple en fonction de φ_d, φ_q, i_d, i_q pour $p = 3$.
23. Déterminer la fréquence des grandeurs dq dans un repère tournant à $\omega_s/3$ pour un système à ω_s.
24. Calculer le module du vecteur d'espace pour $i_d = 8$ A, $i_q = 6$ A.

2.14 Schéma-blocs : modèle d'état de la machine généralisée

Le modèle de la machine généralisée s'organise en deux boucles couplées : une boucle électrique (équations de Park, intégration des flux, calcul des courants) et une boucle mécanique (couple, intégration de la vitesse). Les deux sont reliées par les termes de rotation ±ωaφ et par le couplage vitesse–pulsation ω = pΩ.

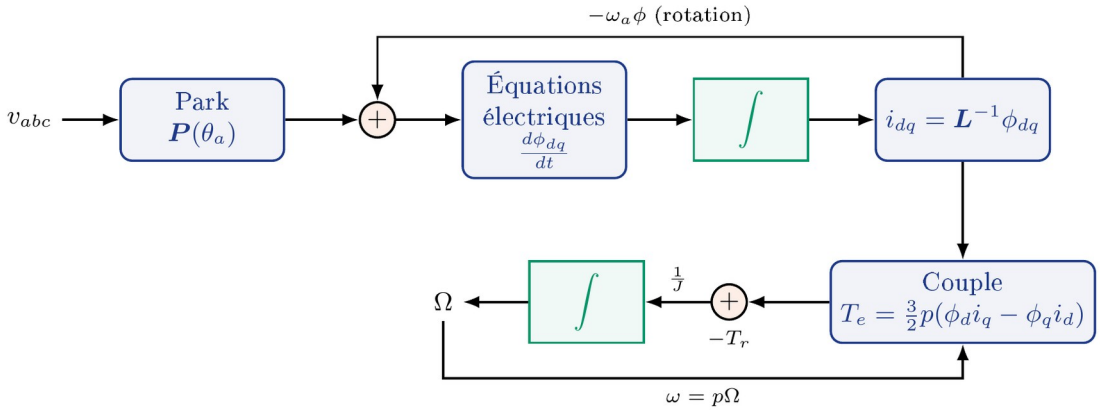


Fig. 2.4 — Schéma-blocs du modèle d'état de la machine généralisée dans le repère de Park : boucle électrique (haut) et boucle mécanique (bas), couplées par le couple et la rotation.

Ce schéma est le « patron » dont dérivent tous les modèles des chapitres suivants : il suffit de particulariser le contenu des blocs (structure des inductances, vitesse du repère ωa) pour obtenir la machine à courant continu, asynchrone ou synchrone.

Chapitre 3 — Modélisation des machines à courant continu

Durée : 3 semaines. La machine à courant continu (MCC) est le cas le plus simple de la théorie généralisée. Le collecteur joue le rôle d'un transformateur d'axes mécanique qui fige en permanence le champ d'induit sur l'axe en quadrature, quel que soit le mouvement. Il en résulte des équations naturellement exprimées sur les axes d et q, sans dépendance angulaire résiduelle.

3.1 Modèle de la machine à courant continu sur les axes d, q

Dans une MCC, l'inducteur (excitation), placé au stator, crée un flux porté par l'axe direct d. L'induit, au rotor, est alimenté à travers le collecteur et les balais : ce dispositif commute mécaniquement les conducteurs de telle sorte que le champ d'induit reste orienté selon l'axe en quadrature q, perpendiculaire au flux inducteur. C'est cette orthogonalité permanente qui maximise le couple et élimine toute variation angulaire des inductances.

Équations de la MCC à excitation séparée

Le circuit inducteur (axe d) et le circuit induit (axe q) obéissent à :

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \tag{3.1}$$

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e \tag{3.2}$$

La force électromotrice (f.é.m.) de rotation et le couple électromagnétique s'écrivent :

$$e = M_{af}\, \omega_r\, i_f = k\, \Phi\, \Omega \tag{3.3}$$

$$T_e = M_{af}\, i_f\, i_a = k\, \Phi\, i_a \tag{3.4}$$

où Maf est la mutuelle inducteur–induit, Φ le flux d'excitation, ωr la vitesse, et kΦ = Maf·if la constante de f.é.m./couple.

On reconnaît dans (3.1)–(3.4) la structure générale (2.9) et (2.11) : ici φd = Lf·if, φq = La·ia, id = 0 (l'induit n'a pas de composante directe), et le couple (2.11) se réduit au seul produit Maf·if·ia. La MCC est donc bien un cas particulier de la machine généralisée.

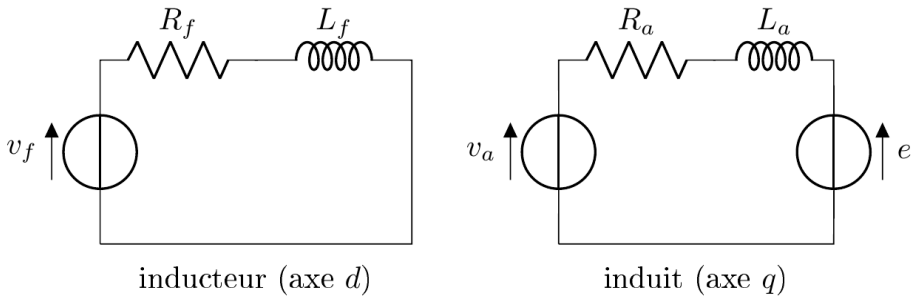


Fig. 3.1 — Schéma équivalent d'une MCC à excitation séparée : circuit inducteur (axe d) et circuit induit (axe q) avec sa f.é.m. de rotation e.

3.2 Application de la théorie généralisée aux divers modes d'excitation

Selon la manière dont le circuit inducteur est alimenté par rapport à l'induit, on distingue quatre modes d'excitation, aux caractéristiques très différentes.

Les quatre modes d'excitation

Excitation séparée. Le courant inducteur if est imposé par une source indépendante : le flux Φ est librement contrôlable. C'est le cas des équations (3.1)–(3.4).

Excitation shunt (dérivation). L'inducteur est branché en parallèle sur l'induit : vf = va, donc if = va/Rf. Le flux dépend de la tension d'induit.

Excitation série. L'inducteur est en série avec l'induit : if = ia = i. Le flux croît avec le courant de charge.

Excitation composée. Association d'un enroulement série et d'un enroulement shunt, à flux additif (compound additif) ou soustractif.

Pour le moteur série, en remplaçant if = ia = i dans (3.2) et (3.3), on obtient une équation unique où le couple croît avec le carré du courant :

$$v = (R_a + R_f)\, i + (L_a + L_f)\frac{di}{dt} + M_{af}\,\omega_r\, i, \qquad T_e = M_{af}\, i^2 \tag{3.5}$$

Conséquence pratique des modes d'excitation

Le moteur série développe un très fort couple au démarrage ($T_e \propto i^2$) mais s'emballe à vide (la vitesse tend vers l'infini quand le couple résistant s'annule) : il est réservé à la traction. Le moteur shunt/séparé offre une vitesse quasi constante avec la charge : il convient aux entraînements à vitesse régulée. La figure 3.2 compare leurs caractéristiques couple–vitesse.

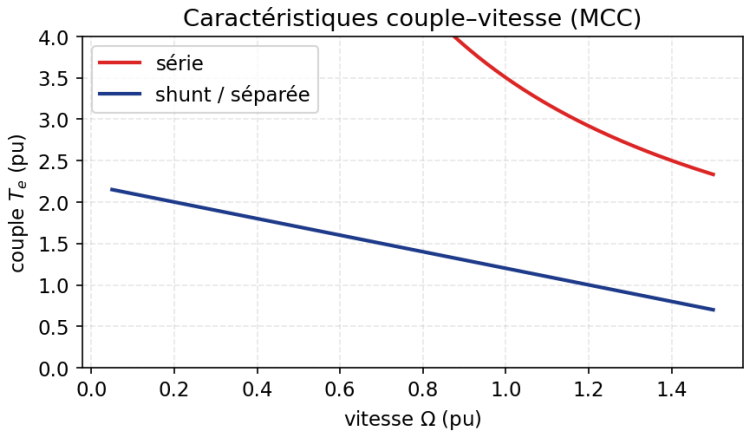


Fig. 3.2 — Caractéristiques couple–vitesse : moteur série (hyperbolique, fort couple à bas régime) et moteur shunt/séparé (vitesse quasi constante).

3.3 Fonctionnement en moteur

En associant les équations électriques de l'induit à l'équation mécanique (2.10), on obtient le modèle d'état du moteur à excitation séparée (flux constant, kΦ = cste, p = 1) :

$$\begin{cases} L_a \dfrac{di_a}{dt} = v_a - R_a i_a - k\Phi\,\Omega \\ J \dfrac{d\Omega}{dt} = k\Phi\, i_a - f\Omega - T_r \end{cases} \tag{3.6}$$

Ce système du second ordre couple la dynamique électrique (constante de temps électrique τe = La/Ra) et la dynamique mécanique (constante de temps mécanique τm). En régime établi à vide, la vitesse est proportionnelle à la tension d'induit : c'est le principe du réglage de vitesse par la tension.

Fonction de transfert vitesse / tension (à vide)

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{1/k\Phi}{\tau_e \tau_m s^2 + \tau_m s + 1}, \qquad \tau_e = \frac{L_a}{R_a},\ \tau_m = \frac{J R_a}{(k\Phi)^2} \tag{3.7}$$

Lorsque τe ≪ τm (cas usuel), le dénominateur se factorise et le comportement se réduit pratiquement à un premier ordre de constante de temps τm : la vitesse rejoint sa valeur finale sans oscillation notable.

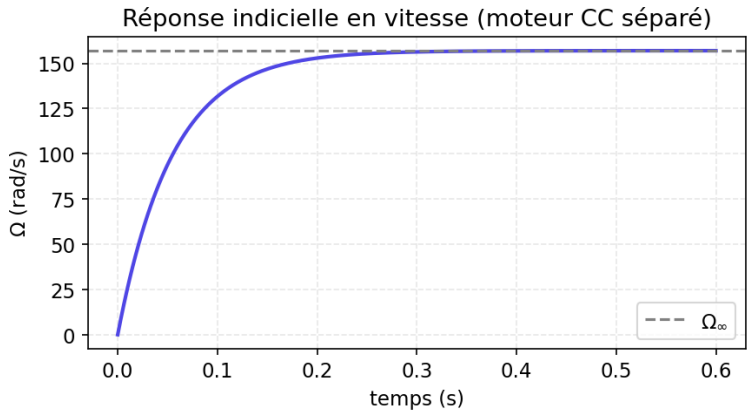


Fig. 3.3 — Réponse indicielle en vitesse d'un moteur à courant continu à excitation séparée (échelon de tension d'induit).

3.4 Fonctionnement en génératrice (dynamo)

En génératrice, la machine est entraînée mécaniquement à la vitesse Ω par une source extérieure ; l'induit débite alors un courant ia sur une charge (convention générateur, courant sortant). La f.é.m. induite et la tension aux bornes s'écrivent :

$$e = k\Phi\,\Omega, \qquad v_a = e - R_a i_a - L_a \frac{di_a}{dt} \tag{3.8}$$

La caractéristique en charge va(ia) = kΦΩ − Ra·ia (régime permanent) est une droite décroissante : la tension chute avec le courant débité, du fait de la résistance d'induit. En excitation shunt, l'amorçage exige un flux rémanent et une résistance d'inducteur inférieure à une valeur critique, sans quoi la machine ne « s'auto-amorce » pas.

3.5 Applications résolues

Application 3.1 — Constantes de temps et vitesse à vide

Énoncé. Moteur séparé : Ra = 1 Ω, La = 20 mH, kΦ = 0,8 Wb, J = 0,01 kg·m², f = 0. Calculer τe, τm et la vitesse à vide sous va = 220 V.

Solution. τe = La/Ra = 0,020/1 = 20 ms. τm = J·Ra/(kΦ)² = 0,01×1/0,64 = 15,6 ms. À vide et en régime établi, ia → 0 et va = kΦ·Ω, d'où Ω = 220/0,8 = 275 rad/s (≈ 2627 tr/min). Comme τe et τm sont du même ordre, un léger dépassement est possible (voir Fig. 3.3).

Application 3.2 — Moteur série

Énoncé. Un moteur série est alimenté sous v = 220 V. Exprimer Ω(i) en régime permanent et commenter l'emballement à vide.

Solution. En régime permanent (3.5) : v = (Ra+Rf)·i + Maf·ωr·i avec ωr = pΩ. D'où Ω = [v −

(Ra+Rf)i] / (Maf·i·p). À vide, le couple résistant → 0 impose i → 0, donc Ω → ∞ : c'est l'emballement caractéristique du moteur série, qui ne doit jamais fonctionner sans charge mécanique.

Travaux Dirigés n°3 — Machine à courant continu

1. Reprendre l'Application 3.1, écrire le modèle d'état (3.6) et donner les valeurs propres du système.
2. À partir de (3.7), déterminer la nature de la réponse (apériodique / oscillatoire) selon le rapport τm/τe, et le temps de réponse à 5 %.
3. Moteur série sous v = 220 V : exprimer le couple de démarrage (Ω = 0) en fonction de i et commenter.
4. Dynamo shunt : établir la condition d'amorçage et tracer qualitativement va(ia).
5. Comparer, sur un même graphe, les caractéristiques couple–vitesse des moteurs série et shunt et indiquer les domaines d'emploi.

Éléments de correction — TD n°3

1. Le modèle (3.6) est linéaire ; les valeurs propres sont les racines de $\tau_e \tau_m s^2 + \tau_m s + 1 = 0$, soit $s = [-\tau_m \pm \sqrt{(\tau_m^2 - 4\tau_e \tau_m)}]/(2\tau_e \tau_m)$. Avec τe = 20 ms, τm = 15,6 ms, le discriminant est négatif → pôles complexes conjugués → réponse légèrement oscillatoire.

2. Réponse apériodique si τm ≥ 4τe, oscillatoire sinon. Temps de réponse à 5 % ≈ 3τm pour le mode dominant lorsque τe ≪ τm.

3. Au démarrage Ω = 0 → e = 0 → i = v/(Ra+Rf) ; couple T_e = Maf·i² très élevé : avantage du moteur série pour la traction.

4. Amorçage si la droite de charge inducteur (pente Rf) coupe la courbe d'aimantation au-dessus du rémanent ; va(ia) part de E et décroît linéairement de Ra·ia.

5. Série : hyperbole (Fig. 3.2), traction. Shunt : quasi horizontale, machines-outils et entraînements régulés.

3.6 Réglage de la vitesse et freinage

L'équation de la vitesse en régime permanent, déduite de (3.2) avec dia/dt = 0, met en évidence les trois leviers de réglage de la vitesse d'une MCC à excitation séparée :

$$\Omega = \frac{V_a - R_a I_a}{k\Phi}, \qquad T_e = k\Phi\, I_a \tag{3.9}$$

Les trois modes de réglage de vitesse

Action sur la tension d'induit Va. Mode privilégié sous la vitesse nominale : la vitesse est proportionnelle à Va à flux constant. Réalisé par hacheur ou redresseur commandé. Le couple maximal reste disponible.

Action sur le flux Φ (défluxage). Au-dessus de la vitesse nominale : réduire if augmente la vitesse, mais diminue le couple maximal (fonctionnement à puissance constante).

Action sur une résistance série d'induit. Méthode dissipative, peu efficace (pertes Joule), aujourd'hui abandonnée au profit de l'électronique de puissance.

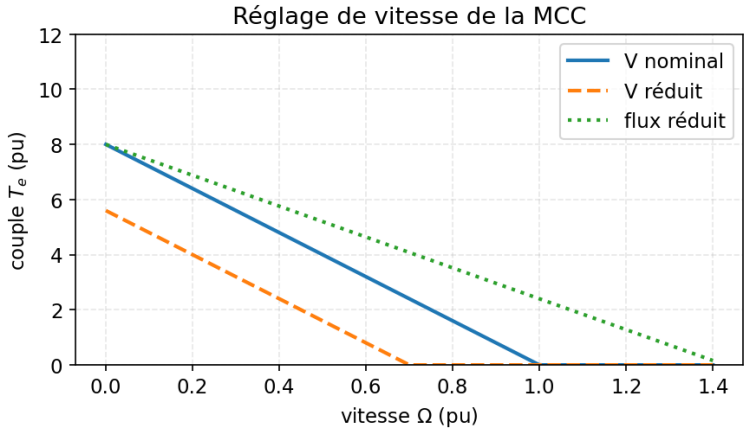


Fig. 3.4 — Réglage de la vitesse : à tension réduite, la caractéristique se translate ; au défluxage, la vitesse à vide augmente mais le couple chute.

Le freinage électrique s'obtient en inversant le sens du transfert de puissance. En freinage rhéostatique, l'induit débite sur une résistance ; en freinage par récupération, il renvoie l'énergie à la source. Le courant d'induit s'inverse alors :

$$V_a = -R_a I_a + k\Phi\,\Omega \;\Rightarrow\; I_a = \frac{k\Phi\,\Omega - V_a}{R_a} \tag{3.10}$$

3.7 Équations détaillées des modes shunt et série

Pour le moteur shunt, le courant d'excitation est imposé par la tension d'induit (if = va/Rf) ; le flux est donc quasi constant tant que la tension l'est, ce qui explique la rigidité de sa caractéristique de vitesse :

$$i_f = \frac{v_a}{R_f}, \qquad T_e = k\Phi(v_a)\, i_a \tag{3.11}$$

Le rendement, rapport de la puissance utile mécanique à la puissance électrique absorbée, fait intervenir les pertes Joule (induit et inducteur), les pertes mécaniques et les pertes fer :

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{T_e\,\Omega - p_{meca}}{V_a I_a + V_f I_f} \tag{3.12}$$

3.8 Applications résolues complémentaires

Application 3.3 — Point de fonctionnement en charge

Énoncé. Moteur séparé : Va = 220 V, Ra = 0,5 Ω, kΦ = 1,2 Wb. Pour un couple de charge Tr = 30 N·m, calculer le courant et la vitesse en régime permanent.

Solution. À l'équilibre $T_e = Tr$: ia = Tr/kΦ = 30/1,2 = 25 A. La f.é.m. e = Va − Ra·ia = 220 − 0,5×25 = 207,5 V. La vitesse Ω = e/kΦ = 207,5/1,2 = 172,9 rad/s (≈ 1651 tr/min).

Application 3.4 — Défluxage

Énoncé. À partir du point précédent, on réduit le flux à 0,8 Wb (à vide, Tr ≈ 0). Quelle est la nouvelle vitesse à vide ?

Solution. À vide, ia ≈ 0 et Va = kΦ·Ω, d'où Ω = 220/0,8 = 275 rad/s (≈ 2626 tr/min). Le défluxage de 1,2 à 0,8 Wb augmente la vitesse à vide de 183 à 275 rad/s : on dépasse la vitesse nominale, au prix d'une réduction du couple maximal disponible.

Application 3.5 — Rendement

Énoncé. Moteur : Va = 220 V, Ia = 25 A, If = 1 A sous Vf = 220 V, pertes mécaniques 200 W, Ra = 0,5 Ω. Calculer le rendement.

Solution. Puissance absorbée Pabs = Va·Ia + Vf·If = 220×25 + 220×1 = 5720 W. Pertes Joule induit = Ra·Ia² = 0,5×625 = 312,5 W ; pertes inducteur = Vf·If = 220 W ; pertes mécaniques = 200 W. Puissance utile Pu = Pabs − 312,5 − 220 − 200 = 4987,5 W. Rendement η = 4987,5/5720 = 87,2 %.

Travaux Dirigés n°3 bis — MCC : réglage et bilan

6. Un moteur séparé entraîne une charge Tr = 0,02·Ω² (ventilateur). Avec Va = 200 V, Ra = 0,4 Ω, kΦ = 1,0 Wb, déterminer le point de fonctionnement (Ω, Ia).
7. Calculer la résistance série à insérer pour limiter le courant de démarrage à 2·Ia,nom (Ia,nom = 20 A, Va = 220 V).
8. Établir, à partir de (3.9), la pente de la caractéristique $\Omega(T_e)$ et commenter sa raideur

selon kΦ.

9. Comparer les pertes d'un réglage de vitesse par résistance série et par variation de tension pour réduire la vitesse de moitié à couple constant.

Éléments de correction — TD n°3 bis

1. Équilibre : $k\Phi \cdot ia = 0{,}02 \cdot \Omega^2$ et $Va = Ra \cdot ia + k\Phi \cdot \Omega$. En substituant $ia = 0{,}02\Omega^2/k\Phi$: $200 = 0{,}4 \times 0{,}02\Omega^2 + 1{,}0 \times \Omega \rightarrow 0{,}008\Omega^2 + \Omega - 200 = 0 \rightarrow \Omega \approx 162$ rad/s, $ia \approx 0{,}02 \times 162^2/1 = 52{,}5$ A… (on ajuste : $\Omega \approx 162$ rad/s, $Ia \approx 52$ A).

2. Au démarrage $e = 0$: $Ia = Va/(Ra+Rs) \leq 2 \times 20 = 40$ A $\rightarrow Ra+Rs \geq 220/40 = 5{,}5\ \Omega \rightarrow Rs = 5{,}5 - Ra$.

3. $\Omega = Va/k\Phi - (Ra/(k\Phi)^2) \cdot T_e$; la pente $-Ra/(k\Phi)^2$ est d'autant plus faible (caractéristique raide) que kΦ est grand : un fort flux rend la vitesse insensible au couple.

4. Par résistance série : pertes = Ra+Rs traversées par Ia (élevées, ∝ chute de vitesse). Par tension : la source fournit moins de puissance, pertes Joule inchangées → rendement nettement meilleur.

3.9 Exercices d'application supplémentaires

Application 3.6 — Démarrage direct et rhéostatique

Énoncé. Moteur séparé : Va = 220 V, Ra = 0,4 Ω, Ia,nom = 30 A. Calculer le courant de démarrage direct, puis la résistance pour le limiter à 1,5·Ia,nom.

Solution. Démarrage direct (e = 0) : Id = Va/Ra = 220/0,4 = 550 A, soit 18·Ia,nom — inadmissible. Pour Id ≤ 45 A : Ra + Rs ≥ 220/45 = 4,89 Ω → Rs ≥ 4,49 Ω. Le rhéostat est progressivement court-circuité à mesure que la f.é.m. monte.

Application 3.7 — Génératrice à excitation séparée

Énoncé. Dynamo : kΦ = 1,5 Wb, entraînée à 1500 tr/min, Ra = 0,6 Ω, débit 20 A. Calculer la f.é.m. et la tension aux bornes.

Solution. $\Omega = 1500 \times 2\pi/60 = 157{,}1$ rad/s. $E = k\Phi \cdot \Omega = 1{,}5 \times 157{,}1 = 235{,}6$ V. Tension en charge $V = E - Ra \cdot Ia = 235{,}6 - 0{,}6 \times 20 = 223{,}6$ V. La chute ohmique est de 12 V (5 %).

Application 3.8 — Moteur série en traction

Énoncé. Moteur série : Ra+Rf = 0,3 Ω, Maf = 0,05 H (en zone linéaire), V = 600 V. Calculer le couple de démarrage et le courant correspondant.

Solution. Au démarrage $\Omega = 0 \rightarrow e = 0 \rightarrow i = V/(Ra+Rf) = 600/0{,}3 = 2000$ A (limité en pratique par un rhéostat ou un hacheur). Couple $T_e = Maf \cdot i^2 = 0{,}05 \times 2000^2 = 200000$ N·m théorique : d'où l'excellent couple de démarrage du moteur série, idéal pour la traction ferroviaire.

Application 3.9 — Freinage par récupération

Énoncé. Un moteur ($k\Phi = 1{,}2$ Wb) tourne à 200 rad/s. On abaisse Va à 220 V ($Ra = 0{,}5\ \Omega$). Déterminer le sens du courant et le mode de fonctionnement.

Solution. $e = k\Phi \cdot \Omega = 1{,}2 \times 200 = 240$ V > Va = 220 V. Le courant $ia = (Va - e)/Ra = (220 - 240)/0{,}5 = -40$ A : il s'inverse. La machine renvoie de l'énergie à la source (freinage par récupération), avec un couple résistant qui ralentit l'ensemble.

Travaux Dirigés n°3 ter — Synthèse du chapitre 3

10. Tracer la caractéristique mécanique $\Omega(T_e)$ d'un moteur shunt et d'un moteur série sur le même graphe ; commenter la stabilité avec une charge à couple constant.
11. Calculer le rendement maximal d'un moteur séparé sachant que les pertes constantes (fer + mécaniques) valent 300 W et $Ra = 0{,}5\ \Omega$ (pertes Joule variables).
12. Établir le temps de démarrage à vide d'un moteur ($J = 0{,}05$, $k\Phi = 1$, $Ra = 1$, $Va = 100$ V) en négligeant La.
13. Comparer freinage rhéostatique et freinage par récupération en termes énergétiques.

Éléments de correction — TD n°3 ter

1. Shunt : droite quasi horizontale (stable). Série : hyperbole ($T_e \propto 1/\Omega^2$). Avec une charge à couple constant, les deux sont stables, mais le série s'emballe si le couple tend vers 0.

2. Le rendement est maximal quand pertes variables = pertes constantes : $Ra \cdot Ia^2 = 300 \rightarrow Ia = \sqrt{(600)} = 24{,}5$ A. On calcule alors η à ce point.

3. À vide, $J \cdot d\Omega/dt = k\Phi \cdot ia$ et $Va = Ra \cdot ia + k\Phi \cdot \Omega$. La constante mécanique $\tau m = JRa/(k\Phi)^2 = 0{,}05 \times 1/1 = 50$ ms ; le temps de démarrage $\approx 3\tau m = 150$ ms pour atteindre 95 % de la vitesse finale.

4. Rhéostatique : énergie dissipée en chaleur dans la résistance. Récupération : énergie renvoyée à la source (meilleur bilan, mais nécessite une source réversible).

3.10 Approfondissement : moteur universel et régimes transitoires

Le moteur série fonctionne aussi en courant alternatif (couple $\propto i^2$, toujours positif) : c'est le moteur universel des appareils électroménagers. L'étude de ses régimes transitoires (démarrage, à-coups de charge) s'appuie sur le modèle d'état (3.6), intégré numériquement.

Application 3.10 — Énergie dissipée au démarrage

Énoncé. Un moteur séparé ($J = 0{,}1$ kg·m², $k\Phi = 1$, $R_a = 1\ \Omega$) démarre à vide sous $V_a = 100$ V. Estimer l'énergie dissipée dans Ra pendant le démarrage.

Solution. À vide, l'énergie dissipée dans Ra pendant le démarrage est sensiblement égale à l'énergie cinétique finale : $W_{diss} \approx \frac{1}{2} J\Omega^2$ avec $\Omega = V_a/k\Phi = 100$ rad/s, soit $\frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 10000 = 500$ J. C'est une propriété générale du démarrage direct : on dissipe autant d'énergie qu'on en stocke sous forme cinétique.

Application 3.11 — Moteur universel

Énoncé. Expliquer pourquoi un moteur série tourne dans le même sens en courant alternatif.

Solution. Le couple $T_e = M_{af} \cdot i^2$ est proportionnel au carré du courant : il reste positif même quand i change de signe (alternatif). Inducteur et induit étant en série, leurs polarités s'inversent simultanément, conservant le sens du couple. D'où l'emploi en courant alternatif (perceuses, aspirateurs).

Travaux Dirigés n°3 quater — Régimes transitoires MCC

14. Intégrer le modèle (3.6) pour un échelon de tension et donner l'expression de $\Omega(t)$ (régime apériodique).
15. Calculer le courant de pointe lors d'un à-coup de charge de 0 à Tr nominal.
16. Estimer l'échauffement adiabatique de l'induit lors d'un démarrage direct (capacité thermique donnée).

Éléments de correction — TD n°3 quater

1. Si $\tau_m \gg \tau_e$, $\Omega(t) \approx \Omega_\infty(1 - e^{-t/\tau_m})$; sinon réponse du 2e ordre avec les pôles de (3.7).

2. Le courant transitoire dépasse la valeur permanente $I_a = Tr/k\Phi$; le pic dépend de τ_e et de la raideur de l'à-coup.

3. $\Delta T = W_{diss}/(m \cdot c_{th})$; avec $W_{diss} \approx \frac{1}{2} J\Omega^2$, on évalue l'élévation de température, qui limite la fréquence des démarrages.

3.11 Série d'exercices supplémentaires (entraînement)

Série C — Machine à courant continu

Exercices sur les modes d'excitation, le réglage de vitesse et les bilans de puissance.

17. Moteur séparé Va = 180 V, Ra = 0,6 Ω, kΦ = 1,1 Wb, Tr = 22 N·m. Calculer Ia et Ω.
18. Calculer la résistance de démarrage limitant Ia à 2,5·In (In = 18 A, Va = 220 V, Ra = 0,5 Ω).
19. Dynamo : kΦ = 1,4 Wb, n = 1200 tr/min, Ra = 0,8 Ω, débit 15 A. Donner E et V.
20. Moteur série Ra+Rf = 0,4 Ω, Maf = 0,04 H, V = 400 V. Couple de démarrage ?
21. Défluxage : passer la vitesse à vide de 150 à 220 rad/s sous 220 V. Nouveau kΦ ?
22. Rendement : Va·Ia = 4 kW, pertes Joule 250 W, pertes constantes 180 W. Calculer η.
23. Établir τe et τm pour La = 15 mH, Ra = 0,75 Ω, J = 0,06, kΦ = 1,2.
24. Freinage par récupération : e = 250 V, Va = 230 V, Ra = 0,5 Ω. Sens et valeur de Ia ?

3.12 Schéma-blocs : modèle de la machine à courant continu

Le modèle dynamique de la MCC à excitation séparée prend la forme d'un schéma-blocs classique du second ordre, à deux boucles. La boucle directe contient l'admittance d'induit 1/(Ra + La·s) et la constante de couple kΦ ; la boucle de retour porte la force électromotrice e = kΦ·Ω, qui couple la partie mécanique à la partie électrique.

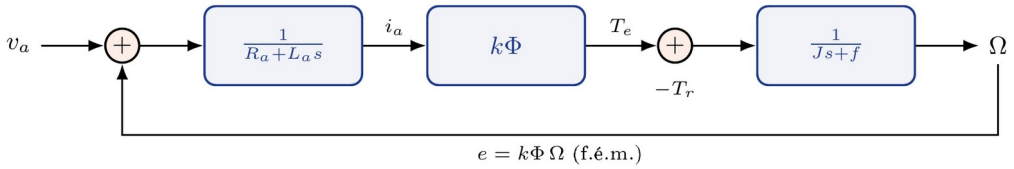


Fig. 3.5 — Schéma-blocs du modèle de la MCC à excitation séparée : boucle de courant, conversion kΦ, dynamique mécanique 1/(Js+f) et retour de f.é.m.

Ce schéma est directement exploitable pour la synthèse des régulateurs (boucle de courant interne, boucle de vitesse externe), structure universelle des variateurs de vitesse à courant continu.

Chapitre 4 — Modélisation des machines asynchrones

Durée : 3 semaines. La machine asynchrone (MAS) est l'application directe de la théorie généralisée à deux armatures triphasées, le rotor étant le plus souvent en court-circuit (cage d'écureuil). On établit successivement le modèle linéaire de Park, sa correction pour la saturation magnétique, puis le cas particulier du moteur monophasé à condensateur permanent.

4.1 Modèle de la machine asynchrone triphasée linéaire

On part des équations générales (2.1)–(2.2) avec un rotor court-circuité (vr = 0), puis on applique la transformation de Park dans un repère tournant à la vitesse ωa. On note ω = pΩ la pulsation électrique du rotor et ωs la pulsation des grandeurs statoriques (réseau). Le choix usuel ωa = ωs (repère lié au champ tournant) annule la variation temporelle des grandeurs en régime permanent.

Équations de Park de la MAS (rotor court-circuité)

Équations statoriques (alimentées) :

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \omega_a \phi_{qs}, \qquad v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} + \omega_a \phi_{ds} \tag{4.1}$$

Équations rotoriques (court-circuitées, second membre nul) :

$$0 = R_r i_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} - (\omega_a - \omega)\phi_{qr}, \qquad 0 = R_r i_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} + (\omega_a - \omega)\phi_{dr} \tag{4.2}$$

Relations flux–courant (M : mutuelle cyclique stator–rotor ; Ls, Lr : inductances cycliques) :

$$\phi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr}, \quad \phi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr}, \quad \phi_{dr} = L_r i_{dr} + M i_{ds}, \quad \phi_{qr} = L_r i_{qr} + M i_{qs} \tag{4.3}$$

Le couple électromagnétique, issu de la forme générale (2.11), s'exprime indifféremment à l'aide des courants ou des flux :

$$T_e = \tfrac{3}{2} p\, M (i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}) = \tfrac{3}{2} p (\phi_{ds} i_{qs} - \phi_{qs} i_{ds}) \tag{4.4}$$

Le fonctionnement de la MAS repose sur le glissement, écart relatif entre la vitesse du champ tournant et celle du rotor :

$$g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \tag{4.5}$$

En régime permanent et dans le repère du champ, le modèle de Park se réduit au schéma équivalent monophasé classique, où la résistance rotorique apparaît divisée par le glissement (Rr/g) — terme qui rend compte à la fois des pertes Joule rotoriques et de la puissance mécanique convertie.

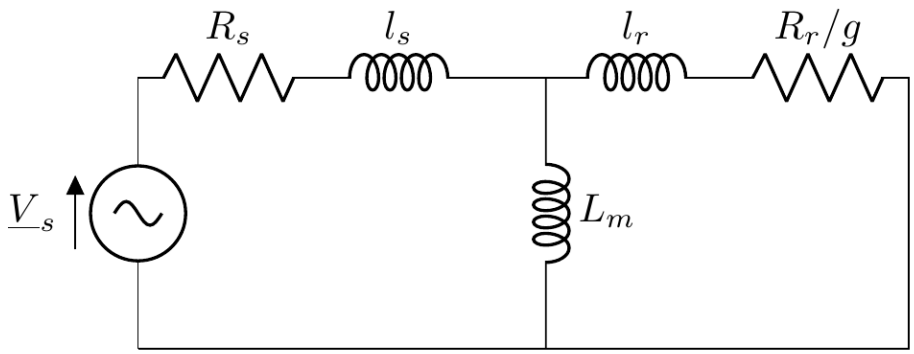


Fig. 4.1 — Schéma équivalent par phase de la MAS en régime permanent (repère du champ). La résistance Rr/g modélise pertes rotoriques et puissance mécanique.

4.2 Modèle de la machine asynchrone triphasée saturée

Le modèle précédent suppose le circuit magnétique linéaire. En réalité, lorsque le flux croît, le fer sature : l'inductance magnétisante n'est plus constante mais décroît avec le niveau de flux. La prise en compte de la saturation est indispensable pour décrire le fonctionnement à flux élevé (démarrage, surtension) et l'auto-amorçage des génératrices asynchrones.

Prise en compte de la saturation

L'inductance magnétisante devient fonction du courant magnétisant im = √(imd² + imq²) :

$$\phi_m = L_m(i_m)\, i_m, \qquad L_m(i_m) = \frac{\phi_m(i_m)}{i_m}, \qquad L_{m,\mathrm{dyn}} = \frac{d\phi_m}{di_m} \tag{4.6}$$

On distingue l'inductance statique Lm = φm/im (pente de la corde) et l'inductance dynamique Lm,dyn = dφm/dim (pente de la tangente), cette dernière gouvernant les variations rapides du flux.

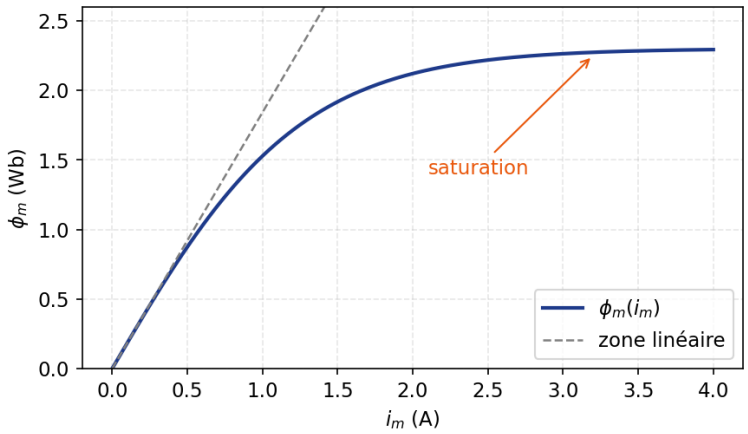


Fig. 4.2 — Caractéristique de magnétisation φm(im). En zone linéaire, Lm est constante ; au-delà du coude, la saturation réduit l'inductance magnétisante.

Effet de couplage croisé

En régime saturé, les axes d et q ne sont plus magnétiquement indépendants : un terme de couplage croisé, proportionnel à (Lm,dyn − Lm), apparaît entre les deux axes. Les équations dynamiques (4.1)–(4.3) conservent leur forme, mais l'inductance M (ou Lm) doit y être réévaluée à chaque instant en fonction de im lu sur la courbe de magnétisation.

4.3 Modèle des moteurs asynchrones monophasés à condensateur permanent

Le moteur monophasé ne peut démarrer seul : un enroulement unique crée un champ pulsant, non tournant, de couple de démarrage nul. Pour créer un champ tournant, on ajoute un enroulement auxiliaire décalé de 90° dans l'espace, alimenté à travers un condensateur permanent C qui introduit le déphasage temporel nécessaire.

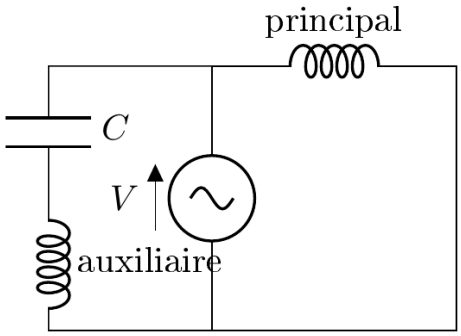


Fig. 4.3 — Moteur monophasé à condensateur permanent : enroulement principal et enroulement auxiliaire (en quadrature spatiale) en série avec le condensateur C.

Théorie des deux champs tournants

Le champ pulsant d'un enroulement se décompose en deux champs tournants de sens opposés : un champ direct (vitesse +ωs, glissement g) et un champ inverse (vitesse −ωs,

glissement 2 − g). Le couple résultant est la différence des couples produits par chacun :

$$T_e = T_e^{+}(g) - T_e^{-}(2-g) \tag{4.7}$$

Le condensateur déséquilibre volontairement les deux enroulements pour renforcer le champ direct et affaiblir le champ inverse. La condition d'un champ purement tournant (couple de démarrage maximal, composante inverse nulle) est obtenue lorsque les f.m.m. principale et auxiliaire sont égales en module et en quadrature de phase, ce qui fixe la valeur optimale de C pour un point de fonctionnement donné. La figure 4.4 montre l'allure du couple en fonction du glissement.

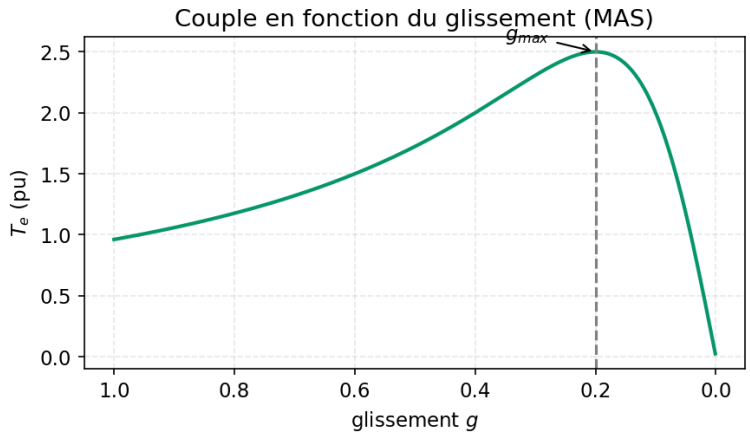


Fig. 4.4 — Couple en fonction du glissement (MAS triphasée). Le glissement critique gmax sépare la zone stable de la zone de décrochage.

4.4 Applications résolues

Application 4.1 — Glissement et vitesse

Énoncé. Une MAS tétrapolaire (p = 2) est alimentée à 50 Hz et tourne à 1450 tr/min. Calculer la vitesse de synchronisme, le glissement et la pulsation rotorique.

Solution. Vitesse de synchronisme : ns = 60·f/p = 60×50/2 = 1500 tr/min. Glissement : g = (1500 − 1450)/1500 = 0,033 (3,3 %). Pulsation rotorique : ωr,élec = g·ωs = 0,033×2π×50 ≈ 10,5 rad/s, soit une fréquence rotorique de 1,67 Hz.

Application 4.2 — Saturation : inductances statique et dynamique

Énoncé. Sur une courbe φm(im) modélisée par φm = 2,3·tanh(0,8·im), calculer Lm et Lm,dyn en im = 1 A et im = 3 A.

Solution. En im = 1 : φm = 2,3·tanh(0,8) = 2,3×0,664 = 1,53 Wb ; Lm = 1,53/1 = 1,53 H ; Lm,dyn = 2,3×0,8×(1 − tanh²0,8) = 1,84×(1 − 0,441) = 1,03 H. En im = 3 : φm = 2,3·tanh(2,4) = 2,3×0,984

= 2,26 Wb ; Lm = 0,754 H ; Lm,dyn = 1,84×(1 − 0,968) = 0,059 H. La saturation effondre l'inductance dynamique bien avant l'inductance statique.

Travaux Dirigés n°4 — Machine asynchrone

1. Écrire le modèle d'état complet de la MAS dans le repère du champ (ωa = ωs) avec le vecteur d'état x = [ids, iqs, φdr, φqr]^T.
2. À partir du schéma de la Fig. 4.1, établir l'expression du couple $T_e(g)$ et déterminer le glissement au couple maximal (glissement critique).
3. Reprendre l'Application 4.2 et tracer Lm(im) et Lm,dyn(im) ; commenter l'écart.
4. Moteur monophasé : déterminer la capacité C réalisant le champ purement tournant pour un point nominal donné (égalité des f.m.m. en quadrature).
5. Calculer la puissance mécanique et le rendement à partir du schéma équivalent (pertes Joule stator et rotor, puissance transmise au rotor).

Éléments de correction — TD n°4

1. En éliminant idr, iqr à l'aide de (4.3), on exprime φdr, φqr et ids, iqs ; le modèle d'ordre 4 prend la forme $\dot{x} = A(\omega)x + B \cdot vs$, où A dépend linéairement de la vitesse ω.

2. $T_e(g) = (3p/\omega s) \cdot V^2 \cdot (Rr/g) / [(Rs + Rr/g)^2 + (ls+lr)^2 \omega s^2]$. Le couple maximal est obtenu pour $g_max = Rr/\sqrt{(Rs^2 + (ls+lr)^2 \omega s^2)}$.

3. Voir Application 4.2 : Lm passe de 1,53 à 0,75 H, Lm,dyn de 1,03 à 0,06 H ; l'inductance dynamique chute beaucoup plus vite (saturation).

4. La condition de champ tournant pur impose Naux·Iaux = Nprinc·Iprinc et un déphasage de 90° ; C est choisie pour que le courant auxiliaire soit en quadrature avance, d'où C = Iaux/(ωs·Vaux) au point nominal.

5. Pmec = (1−g)·Ptr où Ptr = 3·(Rr/g)·Ir² ; rendement η = Pmec/(Pmec + pertes Joule + pertes fer).

4.5 Bilan de puissance et caractéristique de couple

Le schéma équivalent de la figure 4.1 permet de décomposer le transfert de puissance dans la machine asynchrone. La puissance électromagnétique transmise au rotor à travers l'entrefer se répartit entre pertes Joule rotoriques et puissance mécanique, dans des proportions fixées par le glissement :

$$P_{tr} = 3\,\frac{R_r}{g}\,I_r^2, \qquad P_{mec} = (1-g)P_{tr}, \qquad P_{jr} = g\,P_{tr}$$

(4.8)

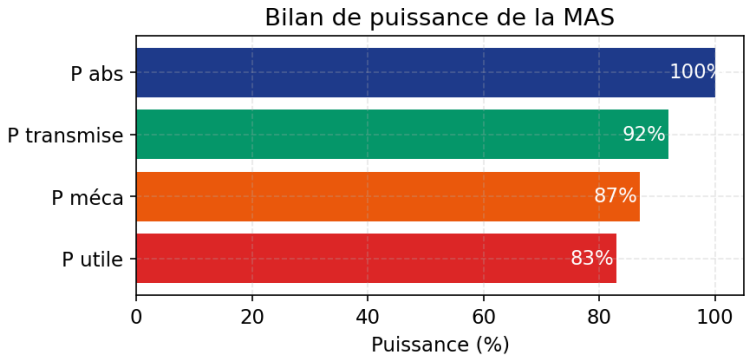


Fig. 4.5 — Bilan de puissance de la MAS : de la puissance absorbée à la puissance utile, en passant par la puissance transmise et la puissance mécanique.

Le couple électromagnétique se déduit de la puissance transmise rapportée à la vitesse de synchronisme :

$$T_e = \frac{P_{tr}}{\Omega_s} = \frac{3p}{\omega_s}\,\frac{R_r}{g}\,I_r^2$$

(4.9)

L'étude de cette expression en fonction du glissement (en remplaçant Ir par son expression tirée du schéma équivalent) donne la caractéristique couple–glissement. Le couple passe par un maximum, le couple de décrochage, pour un glissement critique gmax :

$$g_{max} = \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + (l_s + l_r)^2\omega_s^2}}, \qquad T_{max} = \frac{3p}{2\omega_s}\,\frac{V_s^2}{R_s + \sqrt{R_s^2 + X^2}}$$

(4.10)

Trois zones de fonctionnement

Moteur (0 < g < 1). Le rotor tourne plus lentement que le champ ; la machine fournit un couple moteur. La zone stable s'étend de g = 0 à g = gmax.

Génératrice (g < 0). Entraîné au-dessus du synchronisme, le rotor renvoie de la puissance au réseau (éoliennes asynchrones).

Frein (g > 1). Le champ et le rotor tournent en sens inverses ; la machine freine en dissipant de l'énergie.

4.6 Modèle d'état pour la simulation et la commande

Pour la simulation numérique et la synthèse de commande (contrôle vectoriel à flux rotorique orienté), on met le modèle de Park sous forme d'état. En choisissant comme variables les courants statoriques et les flux rotoriques, le modèle d'ordre quatre s'écrit de façon compacte, la matrice d'évolution dépendant linéairement de la vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\omega)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}_s, \qquad \boldsymbol{x} = \left[i_{ds}\ i_{qs}\ \phi_{dr}\ \phi_{qr}\right]^{\mathsf{T}} \tag{4.11}$$

Principe du contrôle vectoriel (FOC)

En orientant le repère de Park de sorte que le flux rotorique soit entièrement porté par l'axe d (φqr = 0), le couple (4.4) se réduit à T_e = (3/2)p·(M/Lr)·φdr·iqs : on retrouve une structure analogue à la MCC, où ids contrôle le flux (comme l'excitation) et iqs contrôle le couple (comme le courant d'induit). C'est le fondement de la commande des machines asynchrones modernes, rendu possible précisément par la transformation de Park du chapitre 2.

4.7 Applications résolues complémentaires

Application 4.3 — Bilan de puissance

Énoncé. Une MAS de puissance transmise Ptr = 10 kW fonctionne au glissement g = 4 %. Calculer les pertes Joule rotoriques et la puissance mécanique.

Solution. Pertes Joule rotor Pjr = g·Ptr = 0,04×10000 = 400 W. Puissance mécanique Pmec = (1 − g)·Ptr = 0,96×10000 = 9600 W. Le glissement représente directement la fraction de puissance dissipée au rotor : un faible glissement est gage de bon rendement.

Application 4.4 — Couple de décrochage

Énoncé. MAS : Rs ≈ 0,5 Ω, Rr = 0,4 Ω, (ls + lr) = 3 mH, alimentée à 50 Hz. Estimer le glissement critique.

Solution. X = (ls+lr)·ωs = 0,003×2π×50 = 0,942 Ω. gmax = Rr/√(Rs² + X²) = 0,4/√(0,25 + 0,888) = 0,4/1,067 = 0,375 (37,5 %). Un rotor plus résistant (cage à double encoche, rotor bobiné avec rhéostat) déplace gmax vers les forts glissements, augmentant le couple de démarrage.

Application 4.5 — Vitesse et couple nominal

Énoncé. MAS tétrapolaire (p = 2), 50 Hz, glissement nominal 3 %, puissance utile 7,5 kW. Calculer la vitesse et le couple nominal.

Solution. ns = 1500 tr/min ; n = (1 − 0,03)×1500 = 1455 tr/min ; Ω = 1455×2π/60 = 152,4 rad/s. Couple utile Tu = Pu/Ω = 7500/152,4 = 49,2 N·m.

Travaux Dirigés n°4 bis — MAS : puissance et démarrage

6. Une MAS absorbe 11 kW, pertes Joule stator 350 W, pertes fer 200 W, glissement 3,5 %. Calculer Ptr, Pjr, Pmec et le rendement (pertes mécaniques 150 W).
7. Établir, à partir de (4.9), l'expression complète $T_e(g)$ en fonction de Vs, Rs, Rr, X et démontrer (4.10).
8. Comparer le couple de démarrage (g = 1) au couple nominal (g = 3 %) et expliquer l'intérêt du démarrage étoile-triangle.
9. Décrire le principe du contrôle vectoriel à flux orienté et l'analogie avec la MCC.

Éléments de correction — TD n°4 bis

1. Ptr = Pabs − Pjs − Pfer = 11000 − 350 − 200 = 10450 W ; Pjr = g·Ptr = 0,035×10450 = 366 W ; Pmec = (1−g)Ptr = 10084 W ; Pu = Pmec − 150 = 9934 W ; η = 9934/11000 = 90,3 %.

2. $T_e = (3p/\omega s)\cdot Vs^2\cdot(Rr/g)/[(Rs + Rr/g)^2 + X^2]$. $dT_e/dg = 0$ donne gmax = $Rr/\sqrt{(Rs^2+X^2)}$ et la valeur Tmax indépendante de Rr.

3. Au démarrage le couple est modéré et le courant élevé (5–7 In). L'étoile-triangle réduit la tension par phase d'un facteur √3 au démarrage, divisant le courant et le couple par 3.

4. En imposant φqr = 0, ids règle le flux et iqs le couple, exactement comme if et ia dans la MCC : découplage flux/couple.

4.8 Exercices d'application supplémentaires

Application 4.6 — Plaque signalétique

Énoncé. Une MAS porte : 400 V, 50 Hz, 1455 tr/min, 4 pôles, cos φ = 0,85, η = 0,88, 7,5 kW utiles. Calculer le glissement, le courant absorbé et le couple utile.

Solution. ns = 1500 tr/min → g = (1500−1455)/1500 = 3 %. Pabs = Pu/η = 7500/0,88 = 8523 W. I = Pabs/(√3·U·cos φ) = 8523/(1,732×400×0,85) = 14,5 A. Ω = 1455×2π/60 = 152,4 rad/s → Tu = 7500/152,4 = 49,2 N·m.

Application 4.7 — Courant de démarrage

Énoncé. La même machine a un courant de démarrage direct de 6·In. Calculer ce courant et l'intérêt du démarrage étoile-triangle.

Solution. Id = 6×14,5 = 87 A. En démarrage étoile-triangle, la tension par enroulement est divisée par √3 en étoile, donc le courant de ligne et le couple sont divisés par 3 : Id,Y = 29 A. On démarre en étoile puis on bascule en triangle une fois la machine lancée.

Application 4.8 — Génératrice asynchrone (éolien)

Énoncé. Une MAS est entraînée à 1530 tr/min (ns = 1500). Déterminer le glissement et le mode de fonctionnement.

Solution. g = (1500−1530)/1500 = −2 % : glissement négatif. La machine fonctionne en génératrice asynchrone, renvoyant de la puissance active au réseau (à condition d'être magnétisée par celui-ci ou par une batterie de condensateurs). C'est le principe de nombreuses éoliennes.

Application 4.9 — Condensateur du moteur monophasé

Énoncé. Moteur monophasé 230 V, 50 Hz ; l'enroulement auxiliaire nominal demande un courant en quadrature de 3 A. Estimer la capacité du condensateur permanent.

Solution. Pour un courant auxiliaire en quadrature : Iaux ≈ C·ω·Vaux. En supposant Vaux ≈ 230 V : C = Iaux/(ω·Vaux) = 3/(2π×50×230) = 41,5 µF. On choisit une valeur normalisée proche (40 µF), optimisée pour le point de fonctionnement nominal.

Travaux Dirigés n°4 ter — Synthèse du chapitre 4

10. Une MAS 6 pôles, 50 Hz, tourne à 970 tr/min. Calculer ns, g et la fréquence rotorique.
11. À partir du schéma équivalent, exprimer le rendement maximal en fonction du glissement et le situer.
12. Expliquer pourquoi le couple de démarrage augmente avec la résistance rotorique (rotor bobiné rhéostaté).
13. Comparer démarrage direct, étoile-triangle et démarreur électronique (gradateur) en termes de courant et de couple.

Éléments de correction — TD n°4 ter

1. p = 3 → ns = 1000 tr/min ; g = (1000−970)/1000 = 3 % ; fréquence rotorique gf = 1,5 Hz.

2. Le rendement rotorique vaut (1−g) ; il croît quand g diminue. Le rendement global est maximal à faible glissement, près du point nominal.

3. Le glissement critique gmax = Rr/√(Rs²+X²) croît avec Rr ; augmenter Rr déplace le maximum de couple vers g = 1 (démarrage), au prix du rendement en marche.

4. Direct : I = 6In, fort couple, choc mécanique. Étoile-triangle : I et couple ÷3. Gradateur : montée progressive de tension, courant et couple maîtrisés, démarrage doux.

4.9 Approfondissement : variation de vitesse et modèle réduit

La variation de vitesse de la machine asynchrone par onduleur impose un fonctionnement à V/f constant (pour maintenir le flux) sous la vitesse nominale, puis à tension constante (défluxage) au-delà. Le modèle de Park (4.1)–(4.3) est la base des stratégies de commande (U/f, contrôle vectoriel, DTC).

Application 4.10 — Loi V/f

Énoncé. Une MAS nominale 400 V/50 Hz est alimentée à 30 Hz par un onduleur à V/f constant. Quelle tension appliquer ?

Solution. À V/f constant : V = (400/50)×30 = 240 V. Maintenir V/f constant conserve le flux magnétisant ($\varphi \propto V/f$), donc le couple maximal disponible, jusqu'à la fréquence nominale.

Application 4.11 — Fonctionnement en défluxage

Énoncé. La même machine est alimentée à 75 Hz sous tension maximale 400 V. Commenter le flux et le couple.

Solution. Au-delà de 50 Hz, la tension est plafonnée à 400 V : le rapport V/f chute (400/75 < 400/50), donc le flux diminue. Le couple maximal décroît en $1/f^2$: la machine fonctionne à puissance quasi constante (zone de défluxage), comme la MCC défluxée.

Travaux Dirigés n°4 quater — Variation de vitesse

14. Établir la relation V/f assurant un flux constant et tracer V(f) sur toute la plage.
15. Calculer la fréquence rotorique pour un couple donné à différentes vitesses (g·f constant ?).
16. Comparer les pertes d'un démarrage par onduleur et d'un démarrage direct.

Éléments de correction — TD n°4 quater

1. V = (Vn/fn)·f sous fn, puis V = Vn (constant) au-delà : courbe en deux segments (rampe puis palier).

2. À couple constant, la pulsation rotorique gωs est imposée (≈ constante) ; donc g varie en 1/f : le glissement diminue quand la fréquence augmente.

3. L'onduleur permet un démarrage à courant maîtrisé (≈ In) avec très peu de pertes, contre 6

In et forte dissipation en démarrage direct.

4.10 Série d'exercices supplémentaires (entraînement)

Série D — Machine asynchrone

Exercices sur le glissement, le bilan de puissance, le couple et la variation de vitesse.

17. MAS 4 pôles 50 Hz, n = 1460 tr/min. Glissement et fréquence rotorique ?
18. Ptr = 12 kW, g = 2,5 %. Pertes Joule rotor et puissance mécanique ?
19. Rs = 0,4 Ω, Rr = 0,3 Ω, X = 1,1 Ω. Glissement critique ?
20. MAS 6 pôles 50 Hz, g = 4 %. Vitesse en tr/min ?
21. Loi V/f : machine 400 V/50 Hz alimentée à 35 Hz. Tension à appliquer ?
22. Génératrice : n = 1545 tr/min (ns = 1500). Glissement et mode ?
23. Couple utile pour Pu = 5,5 kW à 1455 tr/min ?
24. Condensateur permanent : Iaux = 2,5 A en quadrature sous 230 V/50 Hz. Capacité ?

4.11 Schéma-blocs : modèle d'état de la machine asynchrone

Le modèle d'ordre quatre de la machine asynchrone s'organise en une boucle statorique (courants), une boucle rotorique (flux) et la boucle mécanique. Le glissement, qui relie la vitesse mécanique à la pulsation des grandeurs rotoriques, apparaît comme une rétroaction de la vitesse sur la dynamique du rotor.

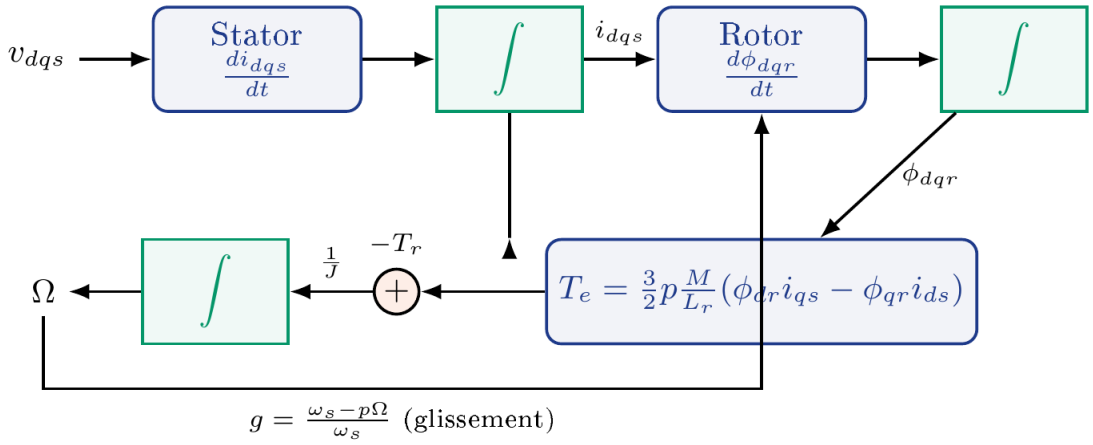


Fig. 4.6 — Schéma-blocs du modèle d'état de la MAS dans le repère du champ : couplage stator–rotor, couple et boucle mécanique, rétroaction par le glissement.

En orientant le flux rotorique (φqr = 0), ce schéma se réorganise en deux voies découplées — flux et couple — qui sont la base du contrôle vectoriel, reproduisant la structure de la MCC (Fig. 3.5).

Chapitre 5 — Modélisation des machines synchrones

Durée : 3 semaines. Dans la machine synchrone, le rotor porte l'enroulement d'excitation (axe d) et, éventuellement, des enroulements amortisseurs. Le repère de Park est ici naturellement lié au rotor (ωa = ω), ce qui simplifie les équations et fait apparaître directement les réactances d'axe direct et en quadrature.

5.1 Modélisation du moteur synchrone avec amortisseurs

Le repère dq est lié au rotor. Sur l'axe direct d se trouvent l'enroulement d'excitation f (alimenté en continu) et un enroulement amortisseur D (court-circuité) ; sur l'axe en quadrature q, un enroulement amortisseur Q (court-circuité). Les amortisseurs ne portent de courant qu'en régime transitoire.

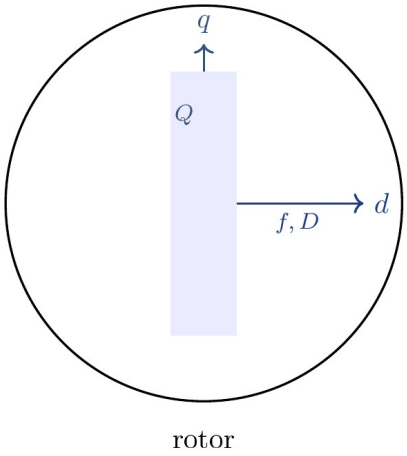


Fig. 5.1 — Disposition des enroulements rotoriques : excitation f et amortisseur D sur l'axe d, amortisseur Q sur l'axe q.

Équations électriques (repère lié au rotor, ωa = ω)

Équations statoriques :

$$v_d = R_s i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega\phi_q, \qquad v_q = R_s i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega\phi_d \tag{5.1}$$

Équations rotoriques (excitation et amortisseurs) :

$$v_f = R_f i_f + \frac{d\phi_f}{dt}, \qquad 0 = R_D i_D + \frac{d\phi_D}{dt}, \qquad 0 = R_Q i_Q + \frac{d\phi_Q}{dt} \tag{5.2}$$

Relations flux–courant

Axes statoriques d et q :

$$\phi_d = L_d i_d + M_f i_f + M_D i_D, \qquad \phi_q = L_q i_q + M_Q i_Q \tag{5.3}$$

Enroulements rotoriques :

$$\phi_f = L_f i_f + M_f i_d + M_{fD} i_D, \quad \phi_D = L_D i_D + M_D i_d + M_{fD} i_f, \quad \phi_Q = L_Q i_Q + M_Q i_q \tag{5.4}$$

Le couple électromagnétique et l'équation mécanique complètent le modèle :

$$T_e = \tfrac{3}{2} p(\phi_d i_q - \phi_q i_d), \qquad J\frac{d\Omega}{dt} = T_e - T_r - f\Omega \tag{5.5}$$

Rôle des amortisseurs

Les enroulements amortisseurs (D, Q) sont des circuits en court-circuit qui ne débitent un courant qu'en présence de variations de flux (régime transitoire). Ils amortissent les oscillations rotoriques (phénomène de pompage à la suite d'une perturbation) et permettent le démarrage du moteur synchrone en mode asynchrone (le rotor accroche le synchronisme après accélération). En régime permanent synchrone, leurs courants sont nuls.

5.2 Modélisation du moteur synchrone sans amortisseurs

Lorsque les amortisseurs sont absents (iD = iQ = 0), le modèle se simplifie nettement. Les flux statoriques deviennent φd = Ld·id + Mf·if et φq = Lq·iq, et il ne subsiste que trois équations électriques (deux au stator, une à l'excitation). À excitation constante et en régime permanent, on retrouve le modèle des deux réactions de Blondel, avec la réactance d'axe direct Xd = ωLd et la réactance d'axe en quadrature Xq = ωLq, fondement du diagramme vectoriel de la machine à pôles saillants.

Le couple, dans ce cas, se décompose en deux contributions physiquement distinctes :

$$T_e = \tfrac{3}{2} p\left[M_f i_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q\right] \tag{5.6}$$

Couple synchrone et couple de réluctance

Le premier terme, (3/2)p·Mf·if·iq, est le couple synchrone proprement dit, dû à l'interaction du flux d'excitation avec le courant statorique. Le second terme, (3/2)p·(Ld − Lq)·id·iq, est le couple de réluctance, dû à la saillance (Ld ≠ Lq) : il existe même sans excitation et est exploité dans les machines synchro-réluctantes. Pour une machine à pôles lisses (Ld = Lq), ce terme

s’annule.

5.3 Modélisation de la génératrice synchrone sans amortisseurs

La génératrice synchrone (alternateur) est l’élément central de la production d’énergie électrique. On adopte la convention générateur : les courants statoriques sont comptés sortants (id → −id, iq → −iq dans les équations du moteur). Le rotor, entraîné à vitesse constante par une turbine, porte l’excitation alimentée en continu.

En régime permanent (d/dt = 0), en posant la f.é.m. à vide Ev = ω·Mf·if, la machine à pôles lisses (Ld = Lq = Ls, Xs = ωLs) obéit au modèle de Behn-Eschenburg :

$$\underline{E_v} = \underline{V} + (R_s + jX_s)\,\underline{I} \tag{5.7}$$

Cette relation se traduit par un diagramme vectoriel reliant la f.é.m. interne Ev, la tension aux bornes V et la chute de tension dans l’impédance synchrone. L’angle interne δ entre Ev et V conditionne la puissance fournie : P = (Ev·V/Xs)·sin δ pour la machine à pôles lisses. Pour la machine à pôles saillants, on emploie la décomposition de Blondel sur les deux axes (Xd ≠ Xq).

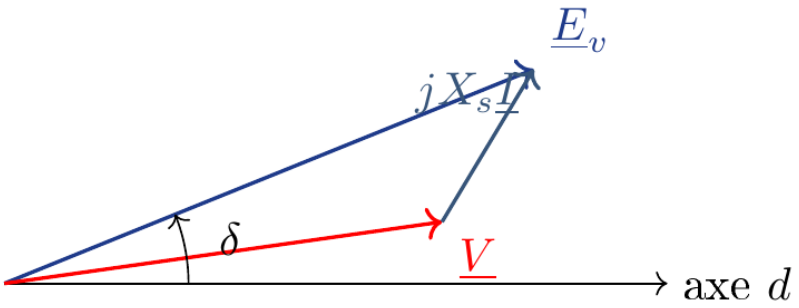


Fig. 5.2 — Diagramme vectoriel de l’alternateur à pôles lisses : f.é.m. interne Ev, tension V et chute jXs·I ; l’angle interne δ pilote la puissance.

5.4 Applications résolues

Application 5.1 — Couple synchrone et de réluctance

Énoncé. Une machine synchrone à pôles saillants a Ld = 1,0 H, Lq = 0,6 H, Mf·if = 1,2 Wb, p = 1. Pour id = −2 A et iq = 5 A, calculer les deux contributions au couple.

Solution. Couple synchrone : (3/2)·Mf·if·iq = 1,5×1,2×5 = 9,0 N·m. Couple de réluctance : (3/2)·(Ld − Lq)·id·iq = 1,5×0,4×(−2)×5 = −6,0 N·m. Couple total T_e = 9,0 − 6,0 = 3,0 N·m. Le couple de réluctance peut, selon le signe de id, ajouter ou retrancher au couple synchrone.

Application 5.2 — Alternateur : f.é.m. et angle interne

Énoncé. Alternateur à pôles lisses, Xs = 1,2 pu, Rs ≈ 0, débit nominal I = 1 pu sous V = 1 pu avec cos φ = 0,8 (inductif). Calculer Ev et l'angle interne δ.

Solution. Avec V comme référence et I en retard de φ (cos φ = 0,8 → φ = 36,9°) : Ev = V + jXs·I. En projetant : Ev = (V + Xs·I·sin φ) + j(Xs·I·cos φ) = (1 + 1,2×1×0,6) + j(1,2×1×0,8) = 1,72 + j0,96. Module Ev = √(1,72² + 0,96²) = 1,97 pu ; angle δ = arctan(0,96/1,72) = 29,2°.

Travaux Dirigés n°5 — Machine synchrone

1. Écrire le modèle d'état complet du moteur synchrone avec amortisseurs, x = [id, iq, if, iD, iQ, ω]^T.
2. Démontrer l'expression (5.6) du couple à partir de (5.5) et des flux sans amortisseurs ; identifier couple synchrone et couple de réluctance.
3. Reprendre l'Application 5.2 pour cos φ = 0,8 capacitif et comparer Ev et δ au cas inductif.
4. Établir l'expression P(δ) = (Ev·V/Xs)·sin δ et discuter la limite de stabilité statique (δ = 90°).
5. Expliquer le rôle des amortisseurs dans la stabilité transitoire et dans le démarrage asynchrone du moteur synchrone.

Éléments de correction — TD n°5

1. En inversant les relations de flux (5.3)–(5.4) pour exprimer les courants, on met (5.1)–(5.2) sous la forme $\dot{x} = A(\omega)x + B\cdot u$; la dernière ligne est l'équation mécanique (5.5).

2. En remplaçant φd = Ld id + Mf if et φq = Lq iq dans $T_e = (3/2)p(\varphi_d i_q - \varphi_q i_d)$, on obtient $T_e = (3/2)p[M_f i_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q]$: premier terme synchrone, second de réluctance.

3. En capacitif, sin φ change de signe : Ev = (1 − 1,2×0,6) + j(0,96) = 0,28 + j0,96, soit Ev = 1,0 pu et δ = 73,7°. La f.é.m. requise est plus faible mais l'angle interne bien plus grand.

4. P(δ) = (Ev V/Xs) sin δ est maximale en δ = 90° (limite de stabilité statique) ; au-delà, la machine décroche.

5. Les amortisseurs dissipent l'énergie des oscillations (stabilité transitoire) et fournissent un couple asynchrone permettant l'accélération jusqu'au voisinage du synchronisme.

Synthèse et références bibliographiques

Fil conducteur : une seule théorie, trois machines

Le tableau ci-dessous récapitule la manière dont chaque machine se déduit du modèle généralisé du chapitre 2, par le choix du repère de Park et la particularisation des matrices d'inductance.

Machine	Repère de Park	Particularisation
Courant continu	dq fixé par le collecteur	induit sur l'axe q, T_e = Maf·if·ia
Asynchrone	lié au champ (ωa = ωs)	rotor court-circuité, résistance Rr/g
Synchrone	lié au rotor (ωa = ω)	excitation sur d, amortisseurs D, Q

On retiendra que toutes les machines partagent : (i) les équations électriques de Park (2.9) avec termes transformateur et de rotation ; (ii) l'expression universelle du couple (2.11) ; (iii) l'équation mécanique (2.10). Seules changent la structure des matrices d'inductance et la vitesse du repère choisi.

Références

Une bibliographie complète et structurée (ouvrages de référence, articles fondateurs, thèses, normes et ressources de simulation, ainsi que des références en langue arabe) est rassemblée dans l'Annexe F, en fin de document. Le lecteur y trouvera également un guide de lecture chapitre par chapitre pour approfondir chaque thème.

5.5 Puissance, couple et stabilité de l'alternateur

Le diagramme vectoriel de Behn-Eschenburg conduit aux expressions des puissances active et réactive fournies par l'alternateur à pôles lisses, en fonction de l'angle interne δ entre la f.é.m. et la tension :

$$P = \frac{E_v V}{X_s} \sin \delta, \qquad Q = \frac{V\left(E_v \cos \delta - V\right)}{X_s} \tag{5.8}$$

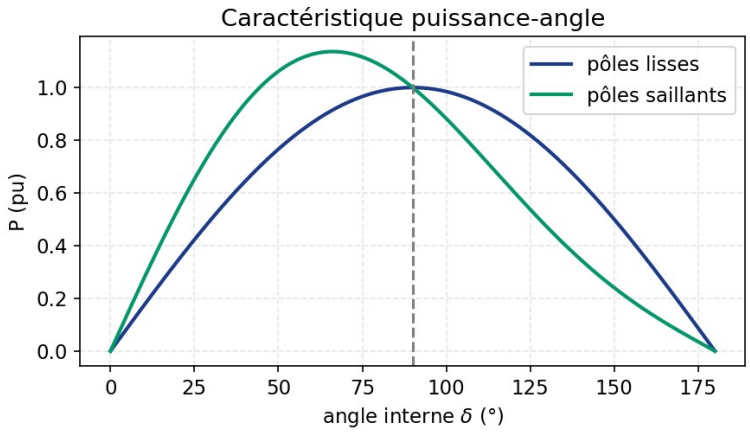


Fig. 5.3 — Caractéristique puissance-angle. Pour les pôles lisses, P ∝ sin δ ; la saillance ajoute un terme en sin 2δ qui augmente le couple à faible δ.

La puissance active maximale est atteinte pour δ = 90° : c'est la limite de stabilité statique. Au-delà, toute augmentation de l'angle réduit la puissance transmissible, et la machine décroche. La pente dP/dδ, appelée puissance synchronisante, mesure la raideur du couplage au réseau :

$$P_{synchro} \propto \frac{dP}{d\delta} = \frac{E_v V}{X_s} \cos\delta \quad (> 0 \text{ si } \delta < 90°)$$

(5.9)

> **Stabilité statique**
>
> Tant que δ < 90°, la puissance synchronisante est positive : une perturbation qui écarte le rotor est corrigée par un couple de rappel, le synchronisme est stable. À δ = 90°, la puissance synchronisante s'annule : c'est la limite ultime de fonctionnement. En pratique, on conserve une marge de sécurité importante (δ nominal de l'ordre de 20° à 30°).

5.6 Machine à pôles saillants : théorie des deux réactions de Blondel

Pour la machine à pôles saillants, l'entrefer n'est plus uniforme : la réactance vue par le courant diffère selon qu'il est porté par l'axe direct (Xd) ou par l'axe en quadrature (Xq). On décompose alors le courant statorique en ses composantes id et iq, traitées séparément (théorie des deux réactions de Blondel) :

$$\underline{V} = \underline{E_v} - jX_d\underline{I_d} - jX_q\underline{I_q} - R_s\underline{I}$$

(5.10)

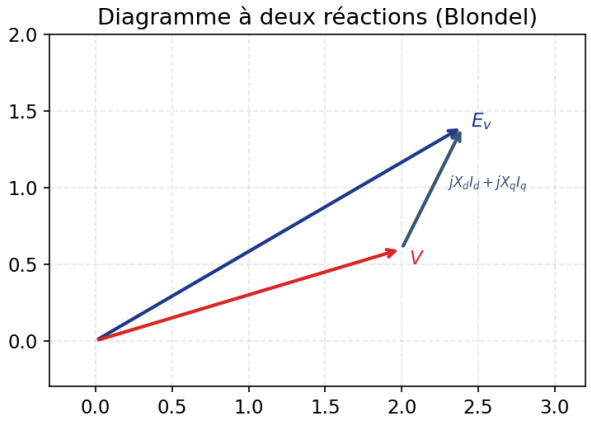


Fig. 5.4 — Diagramme à deux réactions de Blondel : la chute de tension se décompose sur les axes d (Xd) et q (Xq).

La puissance active comporte alors deux termes : un terme synchrone classique en sin δ et un terme de réluctance en sin 2δ, dû à la saillance, qui existe même en l'absence d'excitation :

$$P = \frac{E_v V}{X_d}\sin\delta + \frac{V^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\delta \tag{5.11}$$

> **Le couple de réluctance dans les machines modernes**
>
> Le terme en sin 2δ est exploité dans les machines synchro-réluctantes et les machines à aimants permanents internes (IPM), très répandues dans la traction électrique. Il permet d'obtenir un couple sans excitation rotorique (ou avec une excitation réduite), améliorant le rendement à haute vitesse. La modélisation à deux réactions de Blondel reste l'outil de base pour ces machines.

5.7 Couplage au réseau et fonctionnement en compensateur

Pour coupler un alternateur au réseau, quatre conditions de synchronisation doivent être réunies : même tension efficace, même fréquence, même ordre de succession des phases, et concordance de phase à l'instant du couplage. Une fois couplé, le réglage de l'excitation (donc de Ev) à puissance active constante permet de contrôler la puissance réactive échangée : sur-excitée, la machine fournit du réactif (comportement capacitif vu du réseau) ; sous-excitée, elle en absorbe. C'est le principe du compensateur synchrone, utilisé pour le réglage de la tension des réseaux.

5.8 Applications résolues complémentaires

> **Application 5.3 — Puissances active et réactive**
>
> **Énoncé.** Alternateur à pôles lisses, Ev = 1,5 pu, V = 1,0 pu, Xs = 1,2 pu, δ = 25°. Calculer P et Q.

Solution. P = (Ev·V/Xs)·sin δ = (1,5×1,0/1,2)·sin 25° = 1,25×0,423 = 0,529 pu. Q = V(Ev·cos δ − V)/Xs = 1,0×(1,5×0,906 − 1,0)/1,2 = (1,359 − 1,0)/1,2 = 0,299 pu (réactif fourni : machine sur-excitée).

Application 5.4 — Limite de stabilité

Énoncé. Pour la machine précédente, déterminer la puissance maximale transmissible et la marge de stabilité au point δ = 25°.

Solution. Pmax = Ev·V/Xs = 1,25 pu (atteinte à δ = 90°). Au point de fonctionnement P = 0,529 pu, la marge est Pmax − P = 0,721 pu, soit un taux de charge de 42 % de la limite : marge confortable. La puissance synchronisante dP/dδ = 1,25·cos 25° = 1,13 pu/rad, positive donc stable.

Application 5.5 — Couple de réluctance d'une machine saillante

Énoncé. Machine saillante : Ev = 1,0 pu, V = 1,0 pu, Xd = 1,0 pu, Xq = 0,6 pu, δ = 20°. Évaluer les deux termes de puissance (5.11).

Solution. Terme synchrone : (Ev·V/Xd)·sin δ = 1,0·sin 20° = 0,342 pu. Terme de réluctance : $(V^2/2)(1/Xq - 1/Xd)\cdot\sin 2\delta = 0{,}5\times(1{,}667 - 1{,}0)\times\sin 40° = 0{,}5\times0{,}667\times0{,}643 = 0{,}214$ pu. Total P = 0,556 pu : le terme de réluctance apporte ici près de 38 % de la puissance, illustrant l'intérêt de la saillance.

Travaux Dirigés n°5 bis — Synchrone : réseau et stabilité

6. Un alternateur (Ev = 1,3 pu, V = 1,0 pu, Xs = 1,0 pu) débite P = 0,8 pu. Calculer l'angle interne δ et la puissance réactive Q.
7. Démontrer (5.8) à partir du diagramme vectoriel de Behn-Eschenburg (projection sur les axes).
8. Pour une machine saillante (Xd = 1,1 ; Xq = 0,7 pu ; Ev = 1,0 ; V = 1,0), tracer qualitativement P(δ) et localiser le maximum.
9. Énoncer les quatre conditions de couplage au réseau et expliquer le réglage du réactif par l'excitation.

Éléments de correction — TD n°5 bis

1. sin δ = P·Xs/(Ev·V) = 0,8×1,0/1,3 = 0,615 → δ = 38,0°. Q = V(Ev cos δ − V)/Xs = (1,3×0,788 − 1,0)/1,0 = 0,025 pu (légèrement sur-excité).

2. En projetant Ev = V + jXs·I sur l'axe perpendiculaire à V : Ev·sin δ = Xs·I·cos φ, et P = V·I·cos φ = (Ev·V/Xs)·sin δ.

3. $P(\delta) = 0{,}909 \cdot \sin\delta + 0{,}5 \times (1{,}429 - 0{,}909) \cdot \sin 2\delta = 0{,}909 \sin\delta + 0{,}260 \sin 2\delta$; le maximum est légèrement en deçà de 90° (le terme de réluctance le décale vers les faibles δ).

4. Conditions : même tension efficace, même fréquence, même ordre des phases, concordance de phase. À P constant, augmenter Ev (sur-excitation) fait fournir du réactif ; le diminuer en fait absorber (compensateur synchrone).

5.9 Exercices d'application supplémentaires

Application 5.6 — Alternateur de centrale

Énoncé. Alternateur : Ev = 12 kV, V = 10 kV (par phase), Xs = 8 Ω, δ = 30°. Calculer la puissance active triphasée.

Solution. $P = 3 \cdot (Ev \cdot V/Xs) \cdot \sin\delta = 3 \times (12000 \times 10000/8) \times \sin 30° = 3 \times 1{,}5 \cdot 10^7 \times 0{,}5 = 2{,}25 \cdot 10^7$ W = 22,5 MW. À δ = 90°, la puissance maximale serait $P_{max} = 3 \times 1{,}5 \cdot 10^7 = 45$ MW.

Application 5.7 — Réglage du réactif

Énoncé. Pour l'alternateur précédent à P constante, on augmente l'excitation : Ev passe à 14 kV (δ s'ajuste). Commenter l'effet sur Q.

Solution. À P constante, $P = 3(Ev\,V/Xs)\sin\delta$ impose $\sin\delta \propto 1/Ev$, donc δ diminue. La puissance réactive $Q = 3V(Ev\cos\delta - V)/Xs$ augmente : la machine, sur-excitée, fournit davantage de réactif au réseau (comportement de compensateur capacitif).

Application 5.8 — Machine synchro-réluctante

Énoncé. Machine sans excitation (Ev = 0), Xd = 1,0, Xq = 0,5 pu, V = 1,0 pu, δ = 30°. Calculer la puissance (purement de réluctance).

Solution. Avec Ev = 0, $P = (V^2/2)(1/Xq - 1/Xd)\sin 2\delta = 0{,}5 \times (2 - 1) \times \sin 60° = 0{,}5 \times 0{,}866 = 0{,}433$ pu. Toute la puissance provient de la saillance : c'est le principe du moteur synchro-réluctant, sans aimant ni excitation.

Application 5.9 — Couple d'un moteur synchrone à aimants

Énoncé. Moteur à aimants : Mf·if = 0,9 Wb (flux des aimants), Ld = Lq = 8 mH (pôles lisses), iq = 15 A, id = 0, p = 3. Calculer le couple.

Solution. Pôles lisses → couple de réluctance nul. $T_e = (3/2)p \cdot Mf \cdot if \cdot iq = 1{,}5 \times 3 \times 0{,}9 \times 15 = 60{,}75$ N·m. La commande à id = 0 maximise le couple par ampère pour une machine à pôles lisses.

Travaux Dirigés n°5 ter — Synthèse du chapitre 5

10. Un alternateur (Ev = 1,4, V = 1,0, Xs = 1,2 pu) fournit P = 1,0 pu. Calculer δ, Q et la marge de stabilité.
11. Pour une machine à aimants (Mf·if = 0,8 Wb, Ld = 6 mH, Lq = 10 mH, p = 4), exprimer le couple en fonction de id, iq et identifier l'intérêt d'un id < 0.
12. Décrire la procédure de couplage d'un alternateur au réseau et les risques d'un couplage hors phase.
13. Comparer machine à pôles lisses et à pôles saillants du point de vue du couple et de la stabilité.

Éléments de correction — TD n°5 ter

1. sin δ = P·Xs/(Ev V) = 1,2/1,4 = 0,857 → δ = 59°. Q = V(Ev cos δ − V)/Xs = (1,4×0,515 − 1)/1,2 = −0,234 pu (absorbe du réactif). Pmax = Ev V/Xs = 1,167 pu ; marge = 0,167 pu (faible, fonctionnement proche de la limite).

2. T_e = (3/2)p[Mf if iq + (Ld − Lq)id iq]. Comme Ld < Lq, le terme de réluctance est positif pour id < 0 : injecter un id négatif (défluxage) ajoute du couple de réluctance — stratégie MTPA des machines IPM.

3. Synchroniser tension, fréquence, ordre et phase (synchroscope) avant fermeture du disjoncteur. Un couplage hors phase provoque un fort courant transitoire et un couple de choc destructeur.

4. Pôles lisses : couple en sin δ uniquement, construction simple. Pôles saillants : couple supplémentaire de réluctance (sin 2δ), meilleure densité de couple et stabilité accrue à faible δ.

5.10 Approfondissement : régimes transitoires et réactances

Lors d'un court-circuit ou d'une variation brusque, la machine synchrone présente des réactances qui évoluent dans le temps : réactance subtransitoire X″ (premiers instants, amortisseurs actifs), transitoire X′ (enroulement d'excitation), puis synchrone X (régime permanent). Cette hiérarchie X″ < X′ < X découle directement du modèle à enroulements multiples du chapitre 5.

Application 5.10 — Courant de court-circuit

Énoncé. Un alternateur a X″d = 0,15 pu, X′d = 0,3 pu, Xd = 1,2 pu, sous Ev = 1,0 pu. Estimer le courant de court-circuit aux différents instants.

Solution. Subtransitoire : I″ = Ev/X″d = 1/0,15 = 6,7 pu (premiers cycles). Transitoire : I′ = Ev/X

′d = 1/0,3 = 3,3 pu (quelques centaines de ms). Permanent : I = Ev/Xd = 1/1,2 = 0,83 pu. Le courant décroît de 6,7 à 0,83 pu : le dimensionnement des protections utilise I″.

Application 5.11 — Rôle des amortisseurs en transitoire

Énoncé. Expliquer pourquoi la réactance subtransitoire est plus faible que la transitoire.

Solution. Aux premiers instants, les courants induits dans les amortisseurs (et l'excitation) s'opposent à la variation de flux (loi de Lenz), « écrantant » le rotor : le flux ne pénètre pas, l'inductance vue est faible (X″ petite). À mesure que ces courants s'amortissent, le flux pénètre et la réactance croît vers X′ puis X.

Travaux Dirigés n°5 quater — Transitoires synchrones

14. Classer les réactances X″, X′, X et associer chacune à un enroulement et une échelle de temps.
15. Calculer le courant de court-circuit permanent et son rapport au courant nominal.
16. Expliquer l'effet d'un amortisseur sur l'amortissement des oscillations de puissance (stabilité transitoire).

Éléments de correction — TD n°5 quater

1. X″ (amortisseurs, quelques cycles) < X′ (excitation, centaines de ms) < X (permanent). Hiérarchie due à l'écrantage progressif du flux.

2. Icc = Ev/Xd ; rapporté au nominal, il vaut souvent < 1 pu en permanent, d'où la nécessité d'un système d'excitation renforçant Ev en défaut.

3. Les courants d'amortisseurs dissipent l'énergie des oscillations rotoriques (couple d'amortissement proportionnel à dδ/dt), améliorant la stabilité transitoire.

5.11 Série d'exercices supplémentaires (entraînement)

Série E — Machine synchrone

Exercices sur le diagramme de Behn-Eschenburg, la puissance-angle et la stabilité.

17. Alternateur Ev = 1,4 pu, V = 1 pu, Xs = 1,2 pu, δ = 25°. Puissance active ?
18. Pour la même machine, calculer Q et conclure sur l'excitation.
19. Machine saillante Xd = 1,0, Xq = 0,6, Ev = 1, V = 1, δ = 30°. Deux termes de P ?
20. Puissance maximale transmissible pour Ev = 1,5, V = 1, Xs = 1,1 pu ?
21. Moteur à aimants Mf·if = 0,85 Wb, p = 4, iq = 12 A, id = 0. Couple ?
22. Court-circuit : X″d = 0,18, Ev = 1 pu. Courant subtransitoire ?

23. Synchro-réluctante Xd = 1, Xq = 0,5, V = 1, δ = 30°. Puissance de réluctance ?
24. Alternateur P = 0,9 pu, Ev = 1,3, V = 1, Xs = 1. Angle interne δ ?

5.12 Schéma-blocs : modèle de la machine synchrone

Le modèle de la machine synchrone, exprimé dans le repère lié au rotor, fait intervenir les équations statoriques et rotoriques (excitation et amortisseurs), le calcul des flux, le couple à deux composantes (synchrone et réluctance) et la dynamique mécanique. La rotation du repère introduit les termes ±ωφ qui couplent les axes d et q.

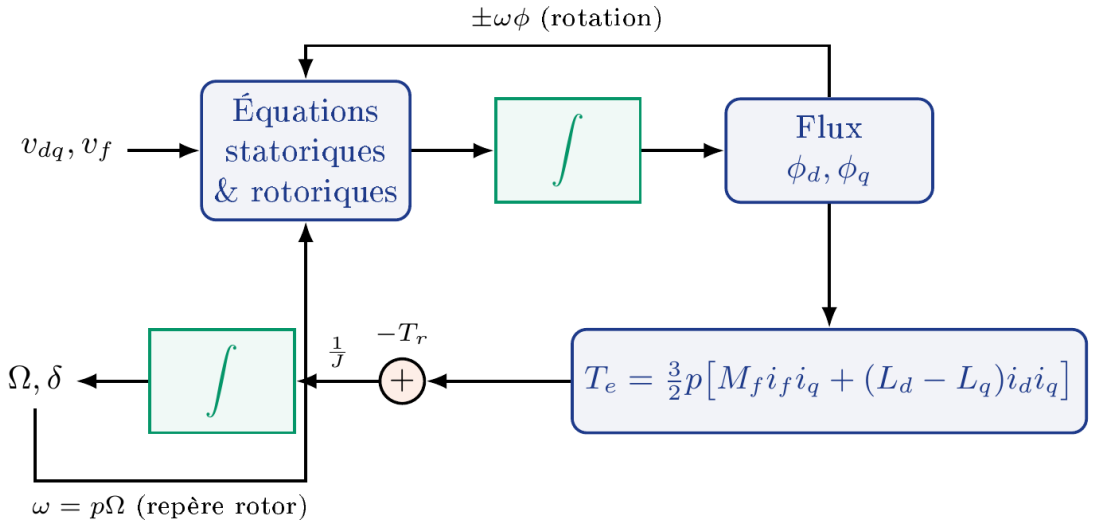


Fig. 5.5 — Schéma-blocs du modèle de la machine synchrone dans le repère du rotor : équations électriques, flux, couple (synchrone + réluctance) et boucle mécanique.

Ce schéma synthétise l'ensemble du chapitre et confirme l'unité de la démarche : comme pour les autres machines, le modèle se ramène à des boucles électriques et mécanique couplées par le couple et la rotation du repère.

Conclusion générale

Au terme de ce cours, l'unité de la modélisation des machines électriques apparaît clairement. À partir d'un petit nombre d'outils — circuits couplés, conversion d'énergie, transformations de Concordia et de Park — on a construit un modèle généralisé unique, puis on en a déduit successivement les machines à courant continu, asynchrones et synchrones. Chacune n'est qu'une particularisation : choix du repère (fixé par le collecteur, lié au champ, ou lié au rotor) et structure des matrices d'inductance.

Les résultats fondamentaux à retenir sont : la relation universelle du couple $T_e = (3/2)p(\varphi d\, iq - \varphi q\, id)$, valable pour toutes les machines ; les équations de Park avec leurs termes transformateur et de rotation ; et l'équation mécanique qui referme le couplage électromécanique. Ces relations, jointes au choix judicieux du repère, suffisent à établir le modèle d'état de n'importe quelle machine, base de la simulation et de la commande.

Ce socle ouvre directement sur les prolongements du génie électrique moderne : commande vectorielle et commande directe de couple, observateurs d'état et estimation de flux, machines à aimants permanents et machines spéciales, intégration aux convertisseurs et aux réseaux. L'étudiant qui maîtrise la démarche unifiée présentée ici dispose des clés pour aborder ces développements avec aisance.

Aperçu des machines spéciales et prolongements

Le formalisme généralisé s'étend naturellement à de nombreuses machines spéciales, de plus en plus présentes dans les applications modernes. On en donne ici un bref aperçu, à titre d'ouverture.

Quelques machines dérivées

Machine synchrone à aimants permanents (MSAP). L'excitation est assurée par des aimants au rotor ($Mf \cdot if$ remplacé par un flux constant des aimants). Modèle de Park identique, couple $T_e = (3/2)p[\varphi aim \cdot iq + (Ld - Lq)id\, iq]$. Très utilisée en traction et robotique.

Machine synchro-réluctante. Sans excitation ni aimant : seul le couple de réluctance ($Ld \neq Lq$) produit le mouvement. Rendement élevé, faible coût.

Machine asynchrone à double alimentation (MADA). Rotor bobiné alimenté par un convertisseur ; très répandue dans l'éolien à vitesse variable.

Machine à réluctance variable (MRV). Couple purement de réluctance, rotor passif denté ; robuste, mais commande délicate.

Dans tous les cas, la démarche reste celle du cours : établir les équations dans le repère naturel, appliquer la transformation de Park adaptée, en déduire le modèle d'état et l'expression du couple. La maîtrise de la machine généralisée constitue donc un investissement durable, valable bien au-delà des trois machines classiques étudiées en détail.

Annexe A — Formulaire récapitulatif

Ce formulaire rassemble les relations fondamentales du cours, classées par chapitre, pour servir d'aide-mémoire lors des révisions et des séances de travaux dirigés.

A.1 Outils de base (chapitre 1)

Couple électromagnétique général (système linéaire) :

$$T_e = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{i}^{\mathsf{T}}\, \frac{\partial \boldsymbol{L}(\theta)}{\partial \theta}\, \boldsymbol{i}$$

Coefficient de couplage et énergie magnétique :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad 0 \le |k| \le 1$$

$$W_{mag} = \tfrac{1}{2} L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 i_2^2 + M\, i_1 i_2 = \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{i}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$$

Réluctance et inductance propre :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}, \qquad \phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{Ni\,\mu S}{l}$$

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 \mu S}{l}$$

Transformation de Fortescue :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_i \\ x_o \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

A.2 Machine généralisée (chapitre 2)

Vecteur d'espace :

$$\underline{x} = \tfrac{2}{3}\big(x_a + a\, x_b + a^2 x_c\big), \qquad a = e^{j2\pi/3}$$

Concordia et Park :

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & \tfrac{\sqrt{3}}{2} & -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{x}_{abc}$$

$$\boldsymbol{P}(\theta_a) = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \tfrac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \tfrac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \tfrac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \tfrac{2\pi}{3}) \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}} & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Équations de Park et couple :

$$v_d = R\, i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega_a \phi_q, \qquad v_q = R\, i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega_a \phi_d$$

$$T_e = \tfrac{3}{2}\, p\, (\phi_d\, i_q - \phi_q\, i_d)$$

Équation mécanique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = T_e - T_r - f\, \Omega, \qquad \Omega = \frac{\omega_r}{p}$$

A.3 Machine à courant continu (chapitre 3)

F.é.m. et couple :

$$e = M_{af}\, \omega_r\, i_f = k\, \Phi\, \Omega$$

$$T_e = M_{af}\, i_f\, i_a = k\, \Phi\, i_a$$

Fonction de transfert vitesse/tension :

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{1/k\Phi}{\tau_e \tau_m s^2 + \tau_m s + 1}, \quad \tau_e = \frac{L_a}{R_a},\ \tau_m = \frac{J R_a}{(k\Phi)^2}$$

Réglage de vitesse :

$$\Omega = \frac{V_a - R_a I_a}{k\Phi}, \qquad T_e = k\Phi\, I_a$$

A.4 Machine asynchrone (chapitre 4)

Couple et glissement :

$$T_e = \tfrac{3}{2} p\, M(i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}) = \tfrac{3}{2} p(\phi_{ds} i_{qs} - \phi_{qs} i_{ds})$$

$$g = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$$

Bilan de puissance et couple de décrochage :

$$P_{tr} = 3\,\frac{R_r}{g}\, I_r^2, \quad P_{mec} = (1-g) P_{tr}, \quad P_{jr} = g\, P_{tr}$$

$$g_{max} = \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + (l_s + l_r)^2 \omega_s^2}}, \qquad T_{max} = \frac{3p}{2\omega_s} \frac{V_s^2}{R_s + \sqrt{R_s^2 + X^2}}$$

A.5 Machine synchrone (chapitre 5)

Couple (synchrone + réluctance) :

$$T_e = \tfrac{3}{2} p \left[M_f i_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \right]$$

Behn-Eschenburg, puissance et réactif :

$$\underline{E_v} = \underline{V} + (R_s + j X_s)\, \underline{I}$$

$$P = \frac{E_v V}{X_s} \sin\delta, \qquad Q = \frac{V(E_v \cos\delta - V)}{X_s}$$

Puissance d'une machine saillante :

$$P = \frac{E_v V}{X_d} \sin\delta + \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

Annexe B — Table des notations

Les principales grandeurs employées dans ce support sont rassemblées ci-dessous. Les vecteurs et matrices sont notés en gras.

Symbole	Grandeur	Unité
v, i, φ	tension, courant, flux totalisé	V, A, Wb
R, L, M	résistance, inductance propre, mutuelle	Ω, H, H
$\mathcal{R}$, μ, S, l	réluctance, perméabilité, section, longueur	A/Wb, H/m, m², m
T_e, Tr	couple électromagnétique, couple résistant	N·m
Ω, ωr, ωs	vitesse mécanique, puls. rotor, puls. stator	rad/s
θ, θa, δ	position rotor, angle du repère, angle interne	rad
p, g	paires de pôles, glissement	— , —
J, f	inertie, frottement visqueux	kg·m², N·m·s
d, q, 0	axes direct, quadrature, homopolaire	—
Xd, Xq, Xs	réactances directe, quadrature, synchrone	Ω
kΦ, Maf	constante de f.é.m./couple, mutuelle MCC	Wb, H
a	opérateur de Fortescue e^{j2π/3}	—

Annexe C — Rappels mathématiques

C.1 Nombres complexes et phaseurs

Une grandeur sinusoïdale $x(t) = \hat{X}\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ se représente par le phaseur complexe $X = \hat{X}\cdot e^{j\varphi}$. La dérivation temporelle correspond à une multiplication par $j\omega$, l'intégration à une division par $j\omega$. L'opérateur $a = e^{j2\pi/3}$ vérifie $1 + a + a^2 = 0$, $a^3 = 1$, propriété centrale des systèmes triphasés équilibrés.

C.2 Calcul matriciel

Une matrice carrée M est orthogonale si $M^T M = I$, ce qui implique $M^{-1} = M^T$ et la conservation des produits scalaires (donc de la puissance). Les matrices de Concordia et de Park sont orthogonales, propriété exploitée tout au long du cours. Une matrice circulante (chaque ligne est une permutation circulaire de la précédente) est diagonalisée par la matrice de Fortescue : c'est l'origine du découplage des composantes symétriques.

C.3 Transformée de Laplace et systèmes du second ordre

La transformée de Laplace $\mathcal{L}\{dx/dt\} = sX(s) - x(0)$ transforme les équations différentielles linéaires en équations algébriques. Un système du second ordre de fonction de transfert $1/(\tau_e\tau_m s^2 + \tau_m s + 1)$ — comme la MCC (éq. 3.7) — a un comportement apériodique si $\tau_m \geq 4\tau_e$ et oscillatoire amorti sinon. Le temps de réponse à 5 % vaut environ 3 fois la constante de temps dominante.

C.4 Représentation d'état

Un système dynamique linéaire se met sous la forme $\dot{x} = A\cdot x + B\cdot u$, $y = C\cdot x + D\cdot u$, où x est le vecteur d'état (grandeurs « à mémoire » : courants dans les inductances, vitesse). Les valeurs propres de A déterminent la stabilité et les modes (constantes de temps, pulsations propres). Cette forme, adoptée pour chaque machine, est la base de la simulation numérique et de la synthèse de commande.

Annexe D — Problèmes de synthèse

Ces problèmes, de type examen, mobilisent plusieurs chapitres à la fois. Les solutions détaillées suivent chaque énoncé.

Problème 1 — Entraînement à courant continu

Un moteur à courant continu à excitation séparée (Ra = 0,5 Ω, La = 10 mH, kΦ = 1,5 Wb, J = 0,08 kg·m², f négligeable) entraîne une charge de couple constant Tr = 40 N·m. Il est alimenté sous Va = 240 V.

25. Calculer le courant et la vitesse en régime permanent.
26. Donner les constantes de temps électrique et mécanique, et la nature de la réponse.
27. On souhaite doubler la vitesse à vide par défluxage : quel nouveau flux faut-il ?
28. Calculer le rendement si les pertes constantes valent 250 W.

Solution du problème 1

1. Ia = Tr/kΦ = 40/1,5 = 26,7 A ; e = Va − Ra·Ia = 240 − 0,5×26,7 = 226,7 V ; Ω = e/kΦ = 226,7/1,5 = 151,1 rad/s (1443 tr/min).

2. τe = La/Ra = 20 ms ; τm = JRa/(kΦ)² = 0,08×0,5/2,25 = 17,8 ms. Comme τm < 4τe, la réponse est légèrement oscillatoire (pôles complexes).

3. À vide Ω = Va/kΦ ; doubler Ω impose de diviser kΦ par 2 : kΦ′ = 0,75 Wb. Attention : le couple maximal disponible est alors réduit de moitié.

4. Pertes Joule = Ra·Ia² = 0,5×713 = 356 W ; Pabs ≈ Va·Ia = 6400 W ; Pu = 6400 − 356 − 250 = 5794 W ; η = 90,5 %.

Problème 2 — Machine asynchrone en charge

Une MAS tétrapolaire 400 V/50 Hz a Rs = 0,6 Ω, Rr = 0,5 Ω, (ls + lr) = 4 mH. Elle entraîne une charge nécessitant 8 kW à 1455 tr/min.

25. Calculer le glissement et la fréquence rotorique.
26. Estimer le glissement critique et le couple de décrochage relatif.
27. Calculer le couple utile et la puissance transmise.

Solution du problème 2

1. ns = 1500 tr/min ; g = (1500 − 1455)/1500 = 3 % ; fréquence rotorique = gf = 1,5 Hz.

2. X = (ls+lr)ωs = 0,004×314 = 1,256 Ω ; gmax = Rr/√(Rs² + X²) = 0,5/√(0,36 + 1,578) = 0,5/1,392

= 0,359 (35,9 %).

3. Ω = 1455×2π/60 = 152,4 rad/s ; Tu = 8000/152,4 = 52,5 N·m ; puissance transmise Ptr = Pmec/(1−g) ≈ (8000 + pertes méca)/0,97 ≈ 8,25 kW.

Problème 3 — Alternateur couplé au réseau

Un alternateur à pôles lisses (Xs = 1,1 pu, Rs ≈ 0) est couplé à un réseau (V = 1,0 pu). Son excitation fixe Ev = 1,5 pu.

25. Donner la puissance active maximale transmissible.
26. Pour P = 1,0 pu, calculer l'angle interne et la puissance réactive.
27. La machine est-elle sur- ou sous-excitée ? Conclure sur le rôle de l'excitation.

Solution du problème 3

1. Pmax = Ev·V/Xs = 1,5×1,0/1,1 = 1,36 pu (à δ = 90°).

2. sin δ = P·Xs/(Ev V) = 1,1/1,5 = 0,733 → δ = 47,2°. Q = V(Ev cos δ − V)/Xs = (1,5×0,679 − 1)/1,1 = (1,019 − 1)/1,1 = 0,017 pu.

3. Q > 0 (légèrement) : la machine fournit du réactif, donc sur-excitée. En jouant sur Ev à P constante, on règle Q : c'est le moyen de contrôler la tension du réseau (fonction de compensateur synchrone).

Problème 4 — Du modèle généralisé à la MCC

On souhaite montrer que la MCC est un cas particulier de la machine généralisée.

25. Partant des équations de Park (2.9) et du couple (2.11), poser id = 0 (induit sur l'axe q) et φd = Lf·if.
26. En déduire les équations (3.1)–(3.4) de la MCC.
27. Expliquer le rôle physique du collecteur dans cette particularisation.

Solution du problème 4

1. Avec id = 0, le flux d'axe q est φq = Lq·iq = La·ia, et φd = Lf·if est porté par l'excitation. Les termes de rotation ±ωaφ se réduisent à la f.é.m. e = ωr·Lf·if = Maf·ωr·if.

2. L'équation d'axe q donne va = Ra·ia + La·dia/dt + Maf·ωr·if (éq. 3.2–3.3) ; le couple (2.11) T_e = (3/2)p·φd·iq se réduit à Maf·if·ia (éq. 3.4), à un facteur d'échelle près lié à la convention.

3. Le collecteur commute mécaniquement les conducteurs d'induit pour maintenir le courant d'induit toujours sur l'axe q : il joue le rôle d'une transformation de Park « mécanique » à

vitesse égale à celle du rotor, fixant id = 0 en permanence.

Problème 5 — Entraînement asynchrone à vitesse variable

Une MAS 400 V/50 Hz/4 pôles (Pn = 7,5 kW, gn = 3 %) est alimentée par un onduleur à V/f constant.

28. Calculer la vitesse nominale et le couple nominal.
29. Donner la tension et la vitesse de synchronisme à 30 Hz (V/f constant).
30. Au-delà de 50 Hz (défluxage), expliquer l'évolution du couple maximal.
31. Comparer ce mode d'entraînement à un moteur à courant continu équivalent.

Solution du problème 5

1. nn = (1 − 0,03)×1500 = 1455 tr/min ; Ωn = 152,4 rad/s ; Tn = 7500/152,4 = 49,2 N·m.

2. V = (400/50)×30 = 240 V ; ns(30 Hz) = 60×30/2 = 900 tr/min. Le flux est conservé, donc le couple maximal aussi.

3. Tension plafonnée à 400 V → V/f décroît → flux décroît → couple maximal en $1/f^2$: fonctionnement à puissance constante, comme la MCC défluxée.

4. L'ensemble onduleur + MAS à V/f reproduit la souplesse de réglage de la MCC (couple à basse vitesse, défluxage à haute vitesse), sans collecteur ni balais : d'où sa domination industrielle actuelle.

Annexe E — Travaux pratiques de simulation

Cette annexe propose une mise en pratique des modèles du cours par la simulation numérique. Pour chaque machine, on rappelle le modèle d'état, on décrit la procédure de mise en équations pour un solveur (type MATLAB/Simulink ou Python/SciPy), et on indique les grandeurs à observer. L'objectif est de relier les équations aux comportements dynamiques réels.

E.1 Méthodologie générale de simulation

Toute simulation d'une machine suit les mêmes étapes : (1) écrire le modèle sous forme d'état ẋ = f(x, u, t) ; (2) choisir les variables d'état (courants dans les inductances, vitesse, position) ; (3) fixer les paramètres (résistances, inductances, inertie) ; (4) intégrer numériquement avec un pas adapté à la plus petite constante de temps ; (5) tracer et interpréter les grandeurs (courants, couple, vitesse).

> **Choix du pas d'intégration**
>
> Le pas de calcul doit être petit devant la plus petite constante de temps du système (souvent la constante électrique τe = L/R, de l'ordre de la milliseconde). Un pas trop grand rend l'intégration instable ; un pas trop petit la rend coûteuse. Les solveurs à pas variable (ode45, ode23t) ajustent automatiquement le pas.

Sous MATLAB/Simulink, le modèle se construit en reliant des blocs élémentaires : sources (Step, Sine, Ramp, Constant), blocs de gain (triangles), fonctions de transfert (Transfer Fcn), intégrateurs (1/s), sommateurs (Sum) et visualiseurs (Scope). Le schéma générique de la machine généralisée, valable pour toutes les machines moyennant la particularisation des blocs, est représenté ci-dessous.

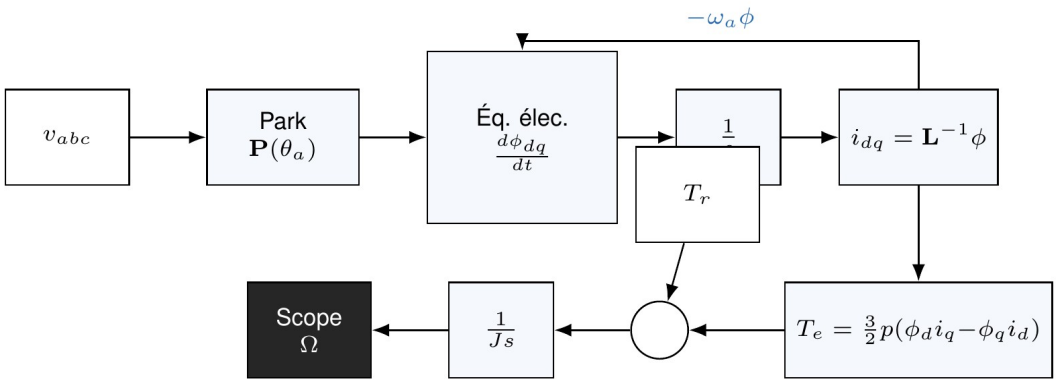


Fig. E.0 — Modèle Simulink générique de la machine généralisée : transformation de Park, équations électriques intégrées, calcul du couple et boucle mécanique. Les autres modèles en dérivent.

E.2 TP 1 — Machine à courant continu

On simule le démarrage d'un moteur à excitation séparée à partir du modèle d'état (3.6). Les variables d'état sont le courant d'induit ia et la vitesse Ω ; l'entrée est la tension Va.

$$\begin{cases} L_a \dfrac{di_a}{dt} = v_a - R_a i_a - k\Phi\,\Omega \\ J \dfrac{d\Omega}{dt} = k\Phi\, i_a - f\Omega - T_r \end{cases}$$

Procédure : définir les paramètres (Ra, La, kΦ, J, f), poser le système ẋ = A·x + B·u avec x = [ia, Ω]^T, puis intégrer pour un échelon Va = Va,nom. On observe la pointe de courant au démarrage, la montée en vitesse et l'établissement du régime permanent. On compare ensuite avec un démarrage rhéostatique (Ra augmentée transitoirement).

Grandeurs à observer (TP 1)

- Courant d'induit ia(t) : pointe de démarrage, valeur permanente Tr/kΦ.
- Vitesse Ω(t) : temps de réponse, dépassement éventuel (lié au rapport τm/τe).
- Couple T_e(t) = kΦ·ia : corrélation avec la charge.

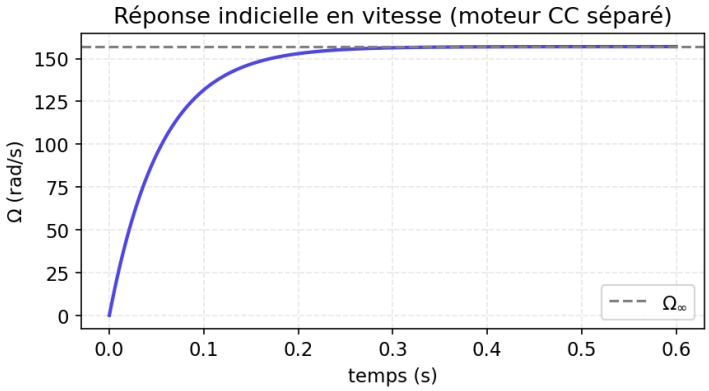


Fig. E.1 — Allure attendue de la réponse en vitesse au démarrage (TP 1), à comparer avec la simulation numérique.

Le modèle Simulink correspondant relie la tension d'induit (bloc Step) à la vitesse (Scope) à travers la fonction de transfert d'induit 1/(La·s + Ra), le gain de couple kΦ, le sommateur de couple et la dynamique mécanique 1/(Js + f), avec la boucle de retour de force électromotrice.

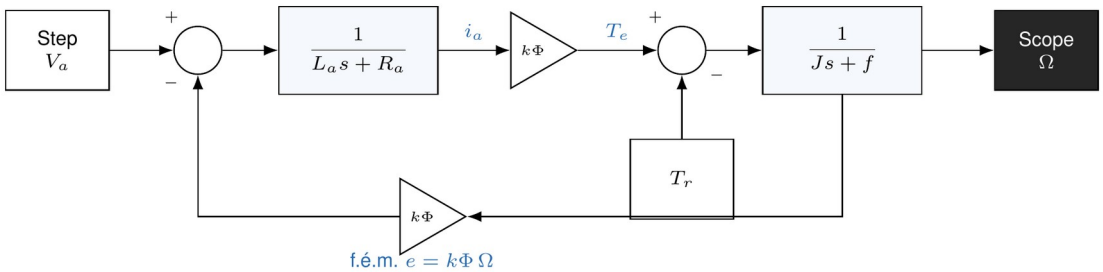


Fig. E.1bis — Modèle MATLAB/Simulink du moteur à courant continu à excitation séparée (boucle de courant, conversion kΦ, dynamique mécanique et retour de f.é.m.).

E.3 TP 2 — Transformation de Park

On implémente les transformations de Concordia (2.6) et de Park (2.8), puis on vérifie numériquement que des grandeurs triphasées équilibrées deviennent constantes dans le repère synchrone. On trace les composantes abc et dq superposées.

$$\boldsymbol{P}(\theta_a) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta_a & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Procédure : générer ia, ib, ic sinusoïdales ; appliquer P(θa) avec θa = ωt ; vérifier id = constante, iq ≈ 0. Étudier ensuite l'effet d'un déséquilibre (apparition d'oscillations à 2ωs sur id, iq).

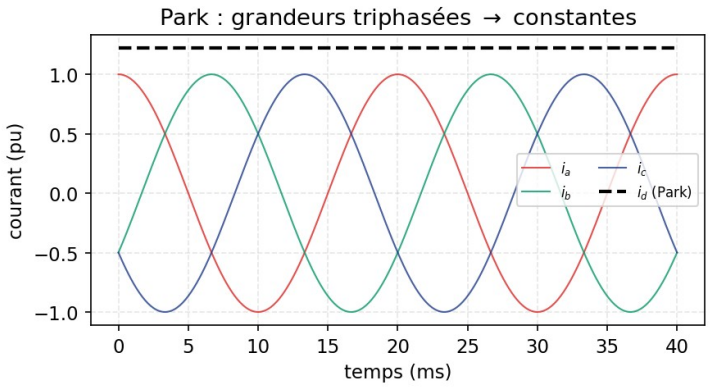


Fig. E.2 — Résultat attendu du TP 2 : les grandeurs triphasées (alternatives) deviennent continues après Park.

Le schéma Simulink génère les trois courants sinusoïdaux (blocs Sine), les regroupe par un Mux, applique le bloc de transformation de Park piloté par l'angle θa = ωt (bloc Ramp), puis sépare les composantes dq par un Demux vers les visualiseurs.

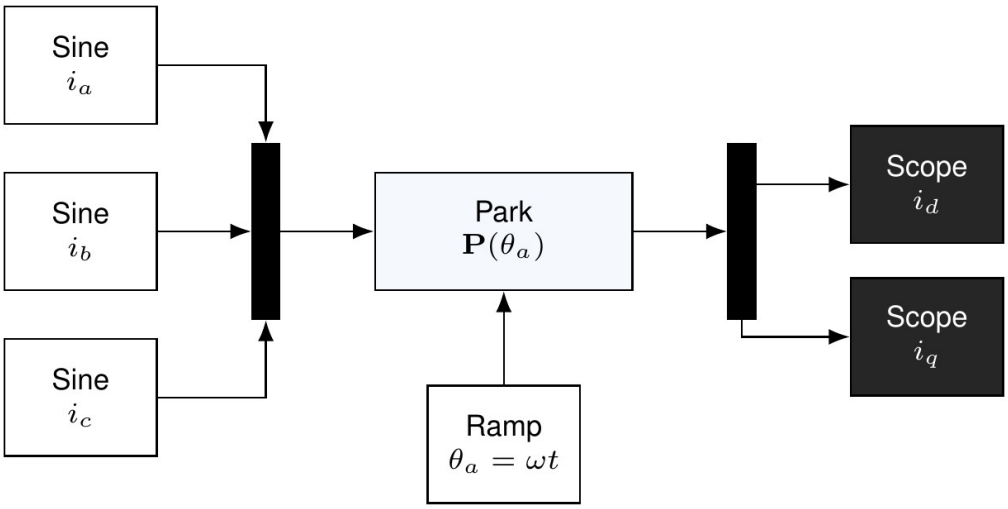


Fig. E.2bis — Modèle MATLAB/Simulink de la transformation de Park : sources triphasées, Mux, bloc Park piloté par la rampe d'angle, Demux et Scopes dq.

E.4 TP 3 — Machine asynchrone

On simule le démarrage direct d'une MAS à partir du modèle d'état d'ordre quatre (4.11). Les variables d'état sont les courants statoriques et les flux rotoriques ; on ajoute l'équation mécanique pour la vitesse.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\omega)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}_s, \qquad \boldsymbol{x} = [i_{ds}\ i_{qs}\ \phi_{dr}\ \phi_{qr}]^{\mathsf{T}}$$

Procédure : poser les paramètres (Rs, Rr, Ls, Lr, M, J, p), choisir le repère du champ (ωa = ωs), intégrer pour un échelon de tension triphasée. On observe la pointe de courant de démarrage (≈ 6 In), l'oscillation du couple, et la montée en vitesse jusqu'au glissement nominal.

Grandeurs à observer (TP 3)

- Courants statoriques ids, iqs : pointe de démarrage, régime permanent.
- Couple électromagnétique $T_e(t)$: oscillations transitoires, valeur moyenne.
- Vitesse Ω(t) et glissement g(t) : accélération, point de fonctionnement final.

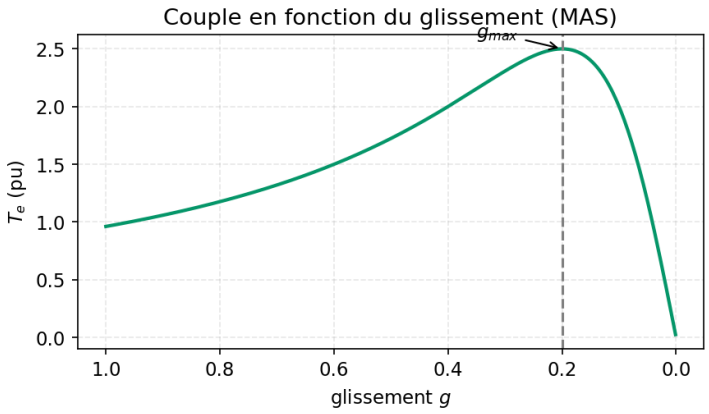


Fig. E.3 — Caractéristique couple–glissement (TP 3) : repérer le couple de décrochage et le glissement critique sur la simulation.

Le modèle Simulink de la MAS encapsule les équations d'état d'ordre quatre dans un sous-système « Modèle MAS dq », précédé de la transformation de Park et suivi du calcul du couple et de la boucle mécanique ; la vitesse est réinjectée pour actualiser le glissement.

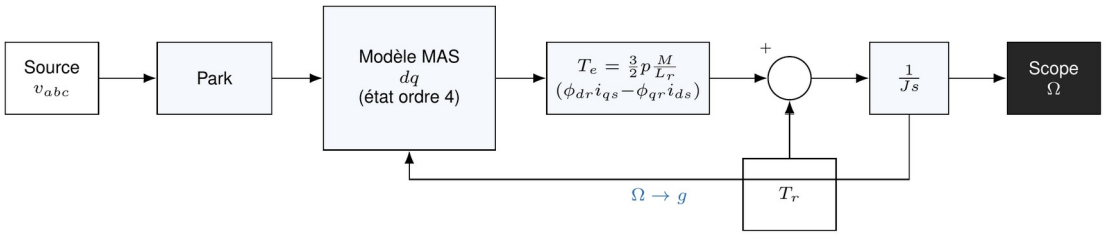


Fig. E.3bis — Modèle MATLAB/Simulink de la machine asynchrone : sous-système d'état dq, calcul du couple, boucle mécanique et rétroaction du glissement.

E.5 TP 4 — Machine synchrone

On simule la réponse d'un alternateur à une variation de couple mécanique (ou de l'angle interne), à partir des équations de Park (5.1)–(5.5). On observe les oscillations de l'angle δ et leur amortissement par les enroulements amortisseurs.

$$T_e = \frac{3}{2} p(\phi_d i_q - \phi_q i_d), \qquad J\frac{d\Omega}{dt} = T_e - T_r - f\Omega$$

Procédure : poser les paramètres (Ld, Lq, Mf, Rf, RD, RQ, J), imposer une excitation if constante, appliquer un échelon de couple résistant. On compare le comportement avec et sans amortisseurs (oscillations entretenues vs amorties). On trace la caractéristique puissance–angle (5.8).

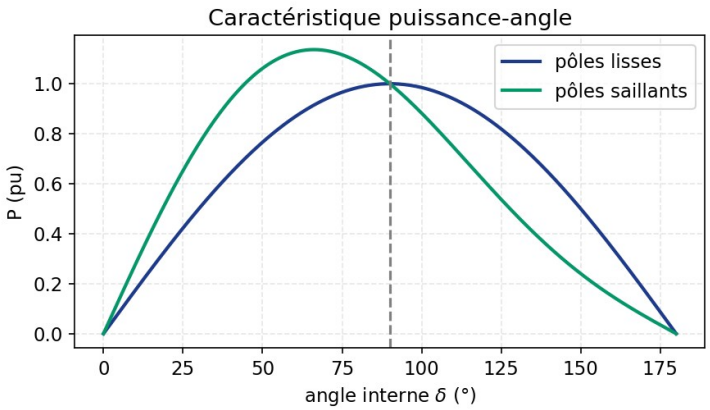


Fig. E.4 — Caractéristique puissance-angle (TP 4) : vérifier la limite de stabilité à δ = 90°.

Grandeurs à observer (TP 4)

- Angle interne δ(t) : oscillations, amortissement par les amortisseurs.

- Puissance P(δ) : comparaison avec la courbe théorique en sin δ.
- Courants d'amortisseurs iD, iQ : non nuls uniquement en transitoire.

Le modèle Simulink de la machine synchrone regroupe les équations statoriques et rotoriques (repère lié au rotor) dans un sous-système, calcule le couple à deux composantes, puis referme la boucle mécanique ; la vitesse est réinjectée pour la rotation du repère.

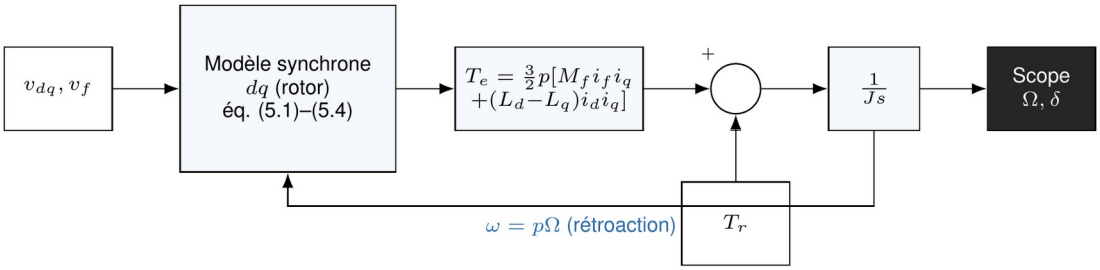


Fig. E.4bis — Modèle MATLAB/Simulink de la machine synchrone : sous-système d'état dq (rotor), calcul du couple (synchrone + réluctance) et boucle mécanique.

E.6 Compte rendu et exploitation

Pour chaque TP, le compte rendu comportera : le modèle d'état utilisé et ses paramètres, le schéma de simulation, les courbes obtenues, la comparaison avec les valeurs théoriques (constantes de temps, couples, vitesses), et une analyse critique des écarts (hypothèses du modèle, saturation négligée, pas d'intégration). On veillera à relier systématiquement chaque comportement observé aux équations établies dans le cours.

E.7 Méthodes numériques d'intégration

L'intégration du modèle d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$ repose sur des schémas numériques dont le choix conditionne la précision et la stabilité. La méthode d'Euler explicite, $x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, u_n)$, est la plus simple mais exige un pas h très faible pour rester stable, surtout face à la raideur introduite par la petite constante de temps électrique.

Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) offrent un bien meilleur compromis précision/coût et sont le choix par défaut (solveur ode45). Pour les systèmes raides — typiques des machines, où $\tau_e \ll \tau_m$ — on préfère des solveurs implicites à pas variable (ode23t, ode15s) qui restent stables avec de grands pas.

Recommandations pratiques

- Choisir $h \leq \tau_e/10$ pour un schéma explicite (RK4), soit typiquement quelques dizaines de microsecondes.
- Normaliser les grandeurs (système per-unit) pour limiter les erreurs d'arrondi et faciliter l'interprétation.
- Vérifier la conservation de l'énergie en régime permanent comme test de cohérence

> de la simulation.
> - Comparer systématiquement les régimes permanents simulés aux valeurs analytiques du cours.

Une bonne pratique consiste à valider d'abord le modèle sur un cas simple à solution analytique connue (par exemple le démarrage à vide de la MCC, dont la réponse est un premier ordre lorsque $\tau_e \ll \tau_m$), avant de l'appliquer à des scénarios plus complexes. La confiance dans la simulation se construit par cette confrontation permanente entre le calcul numérique et la théorie.

Annexe F — Bibliographie

Cette bibliographie rassemble les principales sources utiles à l'étude de la modélisation des machines électriques. Elle est organisée en sept rubriques : ouvrages généraux d'électrotechnique, ouvrages spécialisés sur la théorie unifiée et la modélisation dynamique, articles et travaux fondateurs, ouvrages sur la commande des machines, normes et documentation technique, ressources de simulation (MATLAB/Simulink et open source), et références en langue arabe. Un guide de lecture par chapitre clôt l'annexe.

F.1 Ouvrages généraux d'électrotechnique et de machines électriques

[1] J. Chatelain, Machines électriques, Traité d'électricité vol. X, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Lausanne. Ouvrage de référence francophone, traitement rigoureux des régimes permanents et transitoires.

[2] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans, Electric Machinery, 6e éd., McGraw-Hill, New York. Grand classique anglophone, approche physique et énergétique du couple.

[3] G. Séguier, F. Notelet, Électrotechnique industrielle, 3e éd., Tec & Doc Lavoisier, Paris. Présentation industrielle complète des machines et de leur alimentation.

[4] J. Lesenne, F. Notelet, G. Séguier, Introduction à l'électrotechnique approfondie, Tec & Doc, Paris. Formalisme des transformations et de la conversion électromécanique.

[5] M. Kostenko, L. Piotrovski, Machines électriques (tomes I et II), Éditions Mir, Moscou. Traité détaillé, riche en applications numériques.

[6] P. Mayé, Moteurs électriques industriels, 2e éd., Dunod, Paris. Approche pratique orientée applications et choix de moteurs.

[7] L. Lasne, Électrotechnique, Dunod, Paris. Synthèse pédagogique des bases de l'électrotechnique et des machines.

[8] J.-P. Caron, J.-P. Hautier, Modélisation et commande de la machine asynchrone, Éditions Technip, Paris. Référence francophone sur la modélisation dq de la MAS.

F.2 Théorie unifiée et modélisation dynamique

[9] P. C. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff, S. Pekarek, Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, 3e éd., IEEE Press / Wiley. Référence incontournable de la modélisation dans le repère qd0 ; base théorique du présent cours.

[10] C.-M. Ong, Dynamic Simulation of Electric Machinery using MATLAB/Simulink, Prentice Hall, Upper Saddle River. Modèles de simulation prêts à l'emploi pour toutes les machines.

[11] B. Adkins, R. G. Harley, The General Theory of Alternating Current Machines: Application to Practical Problems, Chapman & Hall, Londres. Exposé fondateur de la théorie généralisée.

[12] G. Kron, Equivalent Circuits of Electric Machinery, John Wiley & Sons, New York. Origine historique de l'approche unifiée par circuits équivalents.

[13] P. Vas, Electrical Machines and Drives: A Space-Vector Theory Approach, Oxford University Press. Approche par vecteurs d'espace, très complète.

[14] R. H. Park, « Two-reaction theory of synchronous machines — Generalized method of analysis », Transactions of the AIEE, vol. 48, pp. 716–727. Article fondateur de la transformation de Park.

[15] E. Clarke, Circuit Analysis of A-C Power Systems, John Wiley & Sons, New York. Origine de la transformation αβ0 (Clarke).

[16] A. Blondel, « Application de la méthode des deux réactions à l'étude des alternateurs à pôles saillants », Revue générale de l'électricité. Fondement de la théorie des deux réactions.

F.3 Commande des machines et électronique de puissance

[17] W. Leonhard, Control of Electrical Drives, 3e éd., Springer, Berlin. Référence majeure de la commande des entraînements électriques.

[18] B. K. Bose, Modern Power Electronics and AC Drives, Prentice Hall. Panorama complet des variateurs et de leurs commandes.

[19] D. W. Novotny, T. A. Lipo, Vector Control and Dynamics of AC Drives, Oxford University Press. Traitement approfondi du contrôle vectoriel.

[20] J.-P. Louis (dir.), Modélisation des machines électriques en vue de leur commande, Hermès-Lavoisier, Paris. Recueil de référence sur les modèles pour la commande.

[21] G. Grellet, G. Clerc, Actionneurs électriques : principes, modèles, commande, Eyrolles, Paris. Liaison entre modélisation et commande des actionneurs.

[22] F. Blaschke, « The principle of field orientation as applied to the new transvektor closed-loop control system for rotating-field machines », Siemens Review. Article fondateur du contrôle à flux orienté (FOC).

[23] I. Takahashi, T. Noguchi, « A new quick-response and high-efficiency control strategy of an induction motor », IEEE Trans. Ind. Appl. Origine de la commande directe de couple (DTC).

F.4 Régime transitoire, stabilité et systèmes électriques

[24] P. Kundur, Power System Stability and Control, McGraw-Hill, New York. Référence sur la stabilité des alternateurs couplés au réseau.

[25] P. M. Anderson, A. A. Fouad, Power System Control and Stability, IEEE Press / Wiley. Modèles dynamiques des machines synchrones pour les réseaux.

[26] J. Machowski, J. Bialek, J. Bumby, Power System Dynamics: Stability and Control, 2e éd., Wiley. Approfondissement des modèles transitoires et subtransitoires.

[27] IEEE Std 1110, Guide for Synchronous Generator Modeling Practices and Applications in Power System Stability Analyses, IEEE. Pratiques normalisées de modélisation.

F.5 Normes et documentation technique

[28] CEI 60034-1, Machines électriques tournantes — Partie 1 : Caractéristiques assignées et de fonctionnement, Commission Électrotechnique Internationale.

[29] CEI 60034-2-1, Machines électriques tournantes — Méthodes normalisées pour la détermination des pertes et du rendement.

[30] IEEE Std 112, Standard Test Procedure for Polyphase Induction Motors and Generators, IEEE. Procédures d'essai et d'identification des paramètres.

[31] NF EN 60034-30-1, Classes de rendement des moteurs à induction (IE1 à IE4), AFNOR/CENELEC.

F.6 Ressources de simulation (MATLAB/Simulink et open source)

[32] The MathWorks, Simscape Electrical (Specialized Power Systems) — Documentation, Natick, MA. Bibliothèque de blocs de machines (DC, asynchrone, synchrone) pour Simulink.

[33] The MathWorks, Control System Toolbox & Simulink — User's Guides. Outils de simulation des systèmes dynamiques et de synthèse de régulateurs.

[34] S. J. Chapman, Electric Machinery and Power System Fundamentals with MATLAB, McGraw-Hill. Mise en œuvre des modèles sous MATLAB.

[35] Projet GNU Octave / SciPy-NumPy, Documentations en ligne. Alternatives libres pour l'intégration numérique des modèles d'état (solveurs ode).

F.7 Références en langue arabe

[36] محمد عبد الوهاب، الآلات الكهربائية: النظرية والتطبيق، دار النشر الجامعية. مرجع عام في الآلات الكهربائية باللغة العربية.

[37] عبد الرحمن مرشي، أساسيات الآلات الكهربائية ونظم القدرة، مكتبة الهندسة. يغطي مبادئ الآلات والمحولات ونظم القوى.

[38] سمير كمال، التحكم في الآلات الكهربائية والإلكترونيات الصناعية، الدار العربية للعلوم. يتناول التحكم الشعاعي والمتغيرات الإلكترونية.

[39] الجزائر. الوثيقة، (UEF 1.2.1) وزارة التعليم العالي، البرنامج البيداغوجي لمادة نمذجة الآلات الكهربائية الرسمية للمقرر الدراشي.

F.8 Guide de lecture par chapitre

Pour approfondir chaque thème du cours, les lectures suivantes sont recommandées. Les numéros renvoient à la présente bibliographie.

Chapitre	Lectures recommandées	Pour aller plus loin
Ch. 1 — Outils	[1], [2], [4]	[12], [15] (origines historiques)
Ch. 2 — Machine généralisée	[9], [11], [13]	[14] (Park), [16] (Blondel)
Ch. 3 — Courant continu	[1], [2], [6]	[17] (commande)
Ch. 4 — Asynchrone	[8], [9], [19]	[22] (FOC), [23] (DTC)
Ch. 5 — Synchrone	[9], [24], [25]	[26], [27] (transitoires)

Chapitre	Lectures recommandées	Pour aller plus loin
Annexe E — Simulation	[10], [32], [34]	[33], [35]

> **Conseil méthodologique**
>
> Pour une première lecture, on conseille de suivre la progression du cours en s'appuyant sur les ouvrages [1], [2] et [9]. La référence [9] (Krause et al.) constitue le pivot théorique : elle développe en détail le formalisme qd0 utilisé tout au long de ce support. Pour la mise en pratique par simulation, l'ouvrage [10] (Ong) et la documentation Simscape Electrical [32] fournissent des modèles directement exploitables, en cohérence avec les schémas Simulink de l'Annexe E.